数学三

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分）

1 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b,\quad x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$,处连续,则(　　)

(A) $ab=\frac{1}{2}$

(B) $ab=-\frac{1}{2}$

(C) $ab=0$

(D) $ab=2$

【答案】A

【解析】$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}$，$f(0)=f(0-0)=b$，

因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(0+0)=f(0)=f(0-0)$，从而 $ab=\dfrac{1}{2}$，应选（A）

2 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是(　　)

(A) $(0,0)$

(B) $(0,3)$

(C) $(3,0)$

(D) $(1,1)$

【答案】D

【解析】由 $\begin{cases}z_x'=3y-2xy-y^2=0\\ z_y'=3x-2xy-x^2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$,$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$,$\begin{cases}x=0\\y=3\end{cases}$,$\begin{cases}x=3\\y=0\end{cases}$,

$z_{xx}''=-2y$，$z_{xy}''=3-2x-2y$，$z_{yy}''=-2x$，

当 $(x,x)=(0,0)$ 时，$AC-B^2=-9<0$，则 $(0,0)$ 不是极值点；

当 $(x,x)=(1,1)$ 时，$AC-B^2=3>0$ 且 $A=-2<0$，则 $(1,1)$ 为极大点，应选（D）

3 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)\bullet f'(x)>0$,则()

(A) $f(1)>f(-1)$

(B) $f(1)<f(-1)$

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$

(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

【答案】C

【解析】若 $f(x)>0$，则 $f'(x)>0$，从而 $f(1)>f(-1)>0$；

若 $f(x)<0$，则 $f'(x)<0$，从而 $f(1)<f(-1)<0$，故 $|f(1)|>|f(-1)|$，应选（C）

4 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})\right]$ 收敛，则 $k=()$

(A) 1

(B) 2

(C) -1

(D)-2

【答案】C

【解析】$\sin\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$，

由 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ 得 $\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，

于是 $\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=(k+1)\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，

由 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛得 $k=-1$，应选（C）

5 设 α 是 n 维单位列向量， E 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆

(B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆

(D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

【答案】A

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$， $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，

令 $\boldsymbol{AX}=\lambda\boldsymbol{X}$，由 $(\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\lambda^2-\lambda)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2-\lambda=0$，$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，

因为 $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\alpha}=1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=1$

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1$，$\lambda_n=0$，从而 $\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T\right|=0$，

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$ 不可逆，应选（A）

6 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,则

(A) A 与 C 相似,B 与 C 相似
(B) A 与 C 相似,B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似
(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

【答案】B

【解析】$\boldsymbol{A,B,C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；

由 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=2$，则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A,C}$ 不相似；应选（B）

7 设 A,B,C 为三个随机事件,且 A 与 C 相互独立,B 与 C 相互独立,则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是
(A)A 与 B 相互独立
(B)A 与 B 互不相容
(C)AB 与 C 相互独立
(D)AB 与 C 互不相容

【答案】C

【解析】$P\left[(A+B)C\right]=P\left[AC+BC\right]=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$

$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC)$，

$P(A+B)P(C)=\left[P(A)+P(B)-P(AB)\right]P(C)$

$=P(A)P(B)+P(B)P(C)-P(AB)P(C)$，

$A\cup B$与C独立即$P\left[\;A+B\;\;C\right]=P\;\;A+B\;\;P\;\;C$ 的充分必要条件为

$P\;\;A\;\;P\;\;C\;\;+P\;\;B\;\;P\;\;C\;\;-P\;\;ABC\;\;=P\;\;A\;\;P\;\;B\;\;+P\;\;B\;\;P\;\;C\;\;-P\;\;AB\;\;P\;\;C$，

$P\;\;ABC\;\;=P\;\;AB\;\;P\;\;C$，即$AB$与$C$独立，应选（C）

(8) 设$X_1,X_2\cdots X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布

(B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$服从$\chi^2$分布

(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$服从χ^2分布

【答案】B

【解析】若总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，因为总体$X\sim N(\mu,1)$，所以$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，再由$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$得$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$

从而$n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，不正确的是（B），应选（B）

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$______.

【答案】$\frac{1}{2}\pi^3$

【解析】$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}dx$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}dx\overset{x=\pi\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi^2\cos^2 tdt$$

$$=2\pi^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{\pi^3}{2}.$$

(10) 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$______.

【答案】$C2^t+\frac{1}{2}t2^t$

【解析】$y_{t+1}-2y_t=0$ 的通解为 $y_t=C2^t$；

设 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的特解为 $y^*=at2^t$，代入得 $a=\frac{1}{2}$，

故 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=C2^t+\frac{1}{2}t2^t$.

(11) 设生产毛产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$，其中 Q 为产量,则边际成本为________.

【答案】$1+e^{-Q}-Qe^{-Q}$

【解析】平均成本为 $\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=1+e^{-Q}$，总成本为

$C(Q)=Q+Qe^{-Q}$，边际成本为 $C'(Q)=1+(1-Q)e^{-Q}$。

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,且 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$，$f(0,0)=0$，

则 $f(x,y)=$________.

【答案】xye^y

【解析】由 $df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy=d(xye^y)$ 得

$f(x,y)=xye^y+C$，

再由 $f(0,0)=0$ 得 $C=0$，故 $f(x,y)=xye^y$.

(13)设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的列向量组，则向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为 ________.

【答案】 2

【解析】 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，所以 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆.

从而 $r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=r(A)$.

由 $A\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$ 得 $r(A)=2$，故向量组 $A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为 2.

(14) 设随机变量的概率分布为 $P\{x=-2\}=\dfrac{1}{2}$，$P\{x=1\}=a$，$P\{x=3\}=b$，若 $Ex=0$，则 $DX=$ ______.

【答案】 $\dfrac{9}{2}$

【解析】 $EX=-1+a+3b=0$，再由 $\dfrac{1}{2}+a+b=1$ 得 $a=b=\dfrac{1}{4}$，

$EX^2=(-2)^2\times\dfrac{1}{2}+1^2\times\dfrac{1}{4}+3^2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{2}$ 所以，$DX=\dfrac{9}{2}$

三、解答题

(15) (本题满分 10 分) 求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

【解析】 $\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt\overset{x-t=u}{=}\int_0^x\sqrt{u}e^{x-u}du=e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du$

则 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{\sqrt{x^3}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\frac{2}{3}.$$

16 计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域。

【解析】 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}dxdy$

$$=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}d\left(y^4\right)$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}(-1)\frac{1}{\left(1+x^2+y^4\right)}\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{-1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2+x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\arctan(x)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}x\right)\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\bullet\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{16}\pi$$

17 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})$.

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln(1+\dfrac{k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\ln(1+\dfrac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x)\,d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1+1)}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{1+x}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=$$

18 已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根,确定常数 k 的取值范围

【解析】 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$,

$$f'(x)=-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}$$

$$=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，可得

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$g''(x)=2\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}<0，\ x\in(0,1)$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)<g'(0)=0$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)<g(0)=0$

因此有 $f'(x)<0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，从而 $f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$，

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}$，则要使得 $f(x)=k$ 在 $(0,1)$ 内有实用，必有

$$\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$$

19 设 $a_0=1,a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})\ (n=1,2,\cdots)$, $S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数,

(1)证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1

(2)证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0\ \ (x\in(-1,1))$,并求 $S(x)$ 的表达式

【解析】

（1）由，两边同时减去 a_n 可知 $a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}\left(a_n-a_{n-1}\right)$

进而 $a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}\cdot\frac{-1}{n}\left(a_{n-1}-a_{n-2}\right)=\cdots=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\left(a_1-a_0\right)=\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

从而有 $a_n=a_{n-1}+\frac{(-1)^n}{n!}=a_{n-2}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}=\cdots=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

则 $\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-1}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

（2）由逐项求导定理可知 $S^{'}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

故 $(1-x)S^{'}(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-na_n\right]x^n+a_1$

$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n$

则 $(1-x)S^{'}(x)-xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}\right]x^n+a_1$

由 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(na_n+a_{n-1}\right)$ 可知 $(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}=0$

又由于 $a_1=0$，故 $(1-x)S^{'}(x)-xS(x)=0$

解此微分方程可得 $S(x)=\frac{ce^{-x}}{1-x}$

又由于 $S(0)=a_0=1$，可知 $c=1$，从而 $S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$。

20 设三阶矩阵 $A=(a_1,a_2,a_3)$ 有 3 个不同的特征数，且 $a_3=a_1+2a_2$，

(1)证明 $r(A)=2$；

(2)若 $\beta=a_1+a_2+a_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

【解析】

（1）证明：设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，

因为 $\mathbf{A}$ 有三个不同的特征值，所以 $\mathbf{A}$ 可以相似对角化，即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得

$$P^{-1}\mathbf{A}P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

因为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$两两不同，所以$R(\mathbf{A})\geq 2$

又因为$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，从而$R(\mathbf{A})<3$，于是$R(\mathbf{A})=2$.

（2）因为$R(\mathbf{A})=2$，所以$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$基础解系中有一个线性无关的解向量，由

$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0\\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}\end{cases}$ 得 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$的通解为$\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$（为任意常数）

21 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交换 $x=Qy$ 下标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$

【解析】

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{bmatrix}$，$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，$f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$

因为$\lambda_3=0$，所以$|\mathbf{A}|=0$

由$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$得$a=2$

由$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$得$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$

由$-3\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$得

$\lambda_1=-3$对应的线性无关的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

由 $6\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

由 $0\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

单位正交化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$

故正交矩阵为 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X,Y 相互独，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度 $f(\mathrm{y})=\begin{cases}2y,0<y<1,\\ 0,其他\end{cases}$

(I) 求 $P\{Y\le EY\}$;

(II) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度;

【解析】

(1) $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\bullet 2ydy=2\bullet\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$P\left[Y\le E(Y)\right]=P\left(Y\le\dfrac{2}{3}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f_Y(y)dy=\int_0^{\frac{2}{3}}2ydy=\dfrac{4}{9}$

(2)求 Z 的分布函数

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le Z)$

$=P(x=0)P(X+Y\le Z|X=0)+P(x=2)P(X+Y\le Z|X=2)$

$=\frac{1}{2}\left[P(Y\le Z)+P(Y\le Z-2)\right]$

当$Z<0$时，$F_Z(z)=0$

当$0\le Z<1$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}\int_0^z 2ydy=\frac{1}{2}z^2$

当$1\le Z<2$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}$

当$2\le Z<3$时，$F_Z(z)=\frac{1}{2}\left(\int_0^{z-2}2ydy+1\right)=\frac{1}{2}\left(z^2-4z+5\right)$

当$z\ge 3$时，$F_Z(z)=1$

故

$$F_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\ \frac{1}{2}z^2,0\le z<1\\ \frac{1}{2},1\le z<2\\ \frac{1}{2}\left(z^2-4z+5\right)\\ 1,z\ge 3\end{cases}$$

则 $f_Z(z)=\begin{cases}0,z<0\\ z,0\le z<1\\ 0,1\le z<2\\ z-2,2\le z<3\\ 0,\mathrm{z}\ge 3\end{cases}$

整理得：$f_Z(z)=\begin{cases}0,z<0;1\le z<2;\mathrm{z}\ge 3\\ z,0\le z<1\\ z-2,2\le z<3\end{cases}$

(23) (本题满分 10 分) 某工程师为了了解一台天平的精度，用该天平对一物体进行n次测量，该物体的质量μ是已知的. 设n次测量结果为$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，该工程师的记录是n次测量的绝对误差$Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$估计$\sigma$

(Ⅰ) 求 Z_i 的概率密度;

(Ⅱ) 利用一阶矩阵求 σ 的矩估计量;

(Ⅲ) 求 σ 的最大似然估计量;

【解析】

(1)因为 $X_i \sim N\left(\mu,\sigma^2\right), Y_i = X_i - \mu \sim N\left(0,\sigma^2\right)$,对应的概率密度为

$f_Y\left(y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$,设 Z_i 的分布函数为 $F\left(z\right)$;

当 $z<0$ 时, $F\left(z\right)=0$;

当 $z \geq 0$ 时, $F\left(z\right) = P\left\{Z_i \leq z\right\} = P\left\{\left|Y_i\right| \leq z\right\} = P\left\{-z \leq Z_i \leq z\right\} = \int_{-z}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$;

则 Z_i 的概率密度为 $f\left(z\right) = F^{'}\left(z\right) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, z>0 \\ 0, z \leq 0 \end{cases}$;

(2)因为 $EZ_i = \int_0^{+\infty} z \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz == \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$,所以 $\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} EZ_i$,从而 σ 的矩估计量为

$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{n} Z_i = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \overline{Z}$

由题知对应的似然函数为 $L\left(z_1, z_2, \cdots z_n; \sigma\right) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$,取对数得:

$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \ln\sigma - \frac{z_i^2}{2\sigma^2} \right) = n\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}} - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left(z_i^2\right)$,

所以 $\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^2\right)}{\sigma^3}$,令

$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma} = 0$,得 $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$,所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$.