数学一

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的

（1） 若函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则

（A）$ab=\dfrac{1}{2}$（B）$ab=-\dfrac{1}{2}$（C）$ab=0$（D）$ab=2$

【答案】A

【解析】$f\ \ 0+0\ \ =\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}$， $f\ \ 0\ \ =f\ \ 0-0\ \ =b$，

因为 $f\ \ x$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f\ \ 0+0\ \ =f\ \ 0\ \ =f\ \ 0-0$ ，从而 $ab=\dfrac{1}{2}$，应选（A）

（2） 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'\left(x\right)>0$ 则

（A） $f\left(1\right)>f\left(-1\right)$（B） $f\left(1\right)<f\left(-1\right)$

（C） $\left|f\left(1\right)\right|>\left|f\left(-1\right)\right|$（D） $\left|f\left(1\right)\right|<\left|f\left(-1\right)\right|$

【答案】C

【解析】若 $f\ \ x\ \ >0$，则 $f'\ \ x\ \ >0$，从而 $f\ \ 1\ \ >f\ \ -1\ \ >0$；

若 $f\ \ x\ \ <0$，则 $f'\ \ x\ \ <0$，从而 $f\ \ 1\ \ <f\ \ -1\ \ <0$，故 $\left|f\ \ 1\ \right|>\left|f\ \ -1\ \right|$，应选（C）

（3）函数 $f\left(x,y,z\right)=x^2y+z^2$ 在点 $\left(1,2,0\right)$ 处沿向量 $n\left(1,2,2\right)$ 的方向导数为（　　）

（A）12　（B）6（C）4　（D）2

【答案】D

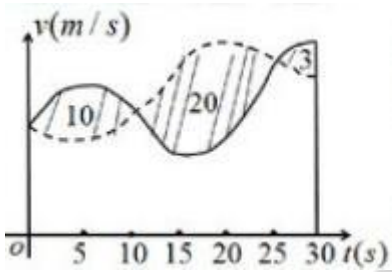
【解析】$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2xy$， $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2$， $\dfrac{\partial f}{\partial z}=2z$，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=4，\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=1，\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}=0$$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$，所求的方向导数为

$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}\right|_{(1,2,0)}=4\times\dfrac{1}{3}+1\times\dfrac{2}{3}=2$.应选（D）

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时甲在乙前方 10（单位：m）处，图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s)虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则



（A）t_0=10（B）$15<t_0<20$（C）t_0=25（D）t_0>25

【答案】C

【解析】根据定积分的几何意义，t_0 时刻，由实线与 t 轴、v 轴以及 $t=t_0$ 围成的面积为甲走的路程 S_1，由虚线与 t 轴、v 轴以及 $t=t_0$ 围成的面积为乙走的路程 S_2、根据乙追上甲为 $S_2-S_1=10$，所以 $t_0=25$

（5）设 α 为 n 维单元列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则（　　）

（A）E-$\alpha\alpha^T$ 不可逆（B）E+$\alpha\alpha^T$ 不可逆（C）E+2$\alpha\alpha^T$（D）E-2$\alpha\alpha^T$

【答案】A

【解析】令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha^T}$，$\boldsymbol{A^2}=\boldsymbol{A}$，

令 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{\lambda X}$，由 $(\boldsymbol{A^2}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\lambda^2}-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得 $\lambda^2-\lambda=0$，$\lambda=0$ 或 $\lambda=1$，

因为 $\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{\alpha^T\alpha}=1=\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ 得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0,\lambda_n=1$

$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}$ 的特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=1$，$\lambda_n=0$,从而 $\left|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}\right|=0$，

即 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha^T}$ 不可逆，应选（A）

（6）已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$,则

（A）A 与 B 相似，B 与 C 相似
（B）A 与 B 相似，B 与 C 不相似
（C）A 与 C 不相似，B 与 C 相似
（D）A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

【答案】B

【解析】$\boldsymbol{A,B,C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$，

由 $\boldsymbol{2E-A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $r\ \boldsymbol{2E-A}\ =1$，则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化，从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$；

由 $\boldsymbol{2E-B}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 得 $r\ \boldsymbol{2E-B}\ =2$，则 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化，从而 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A,C}$ 不相似；应选（B）

（7）设 A,B 为随机事件，若 $0<\mathrm{p}\left(A\right)<1$, $0<\mathrm{p}\left(B\right)<1$, 则 $\mathrm{p}\left(A\middle|B\right)>\mathrm{p}\left(A\middle|\bar{B}\right)$ 的充分必要条件是（）

（A）$\mathrm{p}\left(B\middle|A\right)>\mathrm{p}\left(B\middle|\bar{A}\right)$ （B）$\mathrm{p}\left(B\middle|A\right)<\mathrm{p}\left(B\middle|\bar{A}\right)$

（C）$\mathrm{p}\left(\bar{B}\middle|A\right)>\mathrm{p}\left(B\middle|\bar{A}\right)$ （D）$\mathrm{p}\left(\bar{B}\middle|A\right)<\mathrm{p}\left(B\middle|\bar{A}\right)$

【答案】A

【解析】由 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 得 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，等价于

$P(AB)>P(A)P(B)$；$P(B|A)>P(B|\bar{A})$ 等价于

$\dfrac{P(AB)}{P(A)}>\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$，即 $P(AB)>P(A)P(B)$，应选（A）

（8）设 $X_1,X_2\ldots\ldots X_n\left(n\geq 2\right)$ 来自总体 $N\left(\mu,1\right)$ 的简单随记样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_t$ 则下列

结论中不正确的是：

（A） $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 x^2 分布

（B） $2\left(X_n-X_1\right)^2$ 服从 x^2 分布

（C） $\sum_{t=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 服从 x^2 分布

（D） $n\left(\overline{X}-\mu\right)^2$ 服从 x^2 分布

【答案】 B

【解析】 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$，

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，因为总体 $X\sim N(\mu,1)$，所以 $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$，再由 $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n})$ 得 $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)\sim N(0,1)$

从而 $n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$，不正确的是（B），应选（B）

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(8)}\left(0\right)=$

【答案】 0

【解析】 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+o(x^4)$

由 $\frac{f^{(3)}(0)}{3!}=0$ 得 $f^{(3)}(0)=0$

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$

【答案】 $e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x+c_1\sin\sqrt{2}x\right)$

【解析】特征方程为$\lambda^2+2\lambda+3=0$，特征值为$\lambda_{1,2}=-1\pm\sqrt{2}i$通解为

$$y=e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x+c_1\sin\sqrt{2}x\right)$$

（11）若曲线积分$\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$内与路径无关，则$a=$

【答案】-1

【解析】$P=\frac{x}{x^2+y^2-1}$，$Q=\frac{ay}{x^2+y^2-1}$.

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2-1)^2}，\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2},$$

因为曲线积分与路径无关，所以$a=-1$.

（12）幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x)=$

【答案】$\frac{1}{(1+x)^2}$

【解析】$\int S\ x\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\ -1\ ^{n-1}\ x^n=\frac{x}{1+x}$

故$S\ \ x\ =\left(\frac{x}{1+x}\right)'=\frac{1}{1+x\ ^2}$

（13）设矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为线性无关的 3 维列向量组，则向量组$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$的秩为

【答案】2

【答案】2

【解析】$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆.

从而$r(A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3) = r(A)$.

由$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$得$r(A)=2$，故向量组$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$的秩为 2.

（14）设随机变量X的分布函数为$F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中$\Phi(x)$为标准正态分布函数，则$EX$ =

【答案】2

【解析】X的密度为$f(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi(\frac{x-4}{2})$，

$$
\begin{aligned}
EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0.5\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx + 0.25\int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(\frac{x-4}{2})dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (\frac{x-4}{2}+2)\varphi(\frac{x-4}{2})d(\frac{x-4}{2}) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+2)\varphi(x)dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 2.
\end{aligned}
$$

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

设函数$f\ \ u,v$具有 2 阶连续性偏导数，$y=f\left(e^x,\cos x\right)$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}, \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=e^x f_1' - \sin x \cdot f_2'$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = f_1'(1,1)$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^x f_1' + e^x(e^x f_{11}'' - \sin x f_{12}') - \cos x \cdot f_2' - \sin x e^x f_{21}'' - \sin x f_{2}'$$

则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) - f_2'(1,1)$

（16）（本题满分 10 分）

求$\lim\limits_{n\to k}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【解析】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2-1+1)}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1+\frac{1}{1+x})dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2=$$

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 得极值

【解析】 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 两边对 x 求导得

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$.令 $y'=0$ 得 $x_1=-1,x_2=1$,对应的函数值为

$y_1=0,\mathrm{y}_2=1;$

$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ 两边再对 x 求导得

$6x+6yy'^2+3y^2y''+3y''=0$

由 $y''(-1)=2>0$ 得 $x=-1$ 为极小点,极小值为 $y=0$：

由 $y''(1)=-1<0$ 得 $x=1$ 为极大点,极大值为 $y=1$.

（18）（本题满分 10 分）

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数， $f(1)>0,\ \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$

证（1）方程 $f(x)$=0 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

（2）方程 $f(x)+f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根

【解析】 (1)由 $\lim\limits_{x\to0+}\frac{f(x)}{x}<0$ 得 $f(0)=0$

又存在 $\delta>0$,当 $x\in(0,\delta)$ 时, $\frac{f(x)}{x}<0$,即当 $x\in(0,\delta)$ 时, $\frac{f(x)}{x}<0$.

于是存在 $c\in(0,\delta)$,使得 $f(c)<0$.

因为 $f(c)f(1)<0$,所以存在 $x_0\in(c,1)\subset(0,1)$,使得 $f(x_0)=0$.

(2)令 $\varphi(x)=f(x)f^{'}(x)$,

因为 $\varphi(0)=\varphi(x_0)=0$.

所以由罗尔定理,存在 $\xi\in(0,x_0)\subset(0,1)$,使得 $\varphi^{'}(\xi)=0$.

而 $\varphi^{'}(x)=f(x)f^{''}(x)+f^{'2}(x)$,故 $f(\xi)f^{''}(\xi)+f^{'2}(\xi)=0$,

即 $f(x)f^{''}(x)+f^{'2}(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

（19）（本题满分 10 分）

设薄片型物体 S 是圆锥面 $Z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $Z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点密度为 $u(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 。记圆锥与柱面的交线为 C

（1）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程

（2）求 S 的质量 M

【解析】（1）由题意可知曲线 C 的方程为 $\begin{cases} Z=\sqrt{x^2+y^2} \\ Z^2=2x \end{cases}$

消去 Z 得 $x^2+y^2=2x$，故该曲线为曲线 C 在 xOy 平面上的投影曲线

（2）由（1）得到投影曲线

故有 $M=9\iint\limits_{S}u(x,y,z)dS=9\iint\limits_{D_{xy}}u(x,y,z(x,y))\cdot\sqrt{1+(z_x^{'})^2+(z_y^{'})^2}dxdy$

$$=9\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=18\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy\overset{\text{奇偶性}}{=}36\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot rdr$$

（20）（本题满分 11 分）

三阶行列式 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明 $r(A)=2$

（2）如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 求方程组 $Ax=\beta$ 的通解

【解析】（1）证明：设 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，

因为 $\mathbf{A}$ 有三个不同的特征值，所以 $\mathbf{A}$ 可以相似对角化，即存在可逆矩阵 $\mathbf{P}$，使得

$$P^{-1}\mathbf{A}P=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

因为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 两两不同，所以 $R(\mathbf{A})\ge 2$

又因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，从而 $R(\mathbf{A})<3$，于是 $R(\mathbf{A})=2$.

（2）因为 $R(\mathbf{A})=2$，所以 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 基础解系中有一个线性无关的解向量，由

$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=0\\ \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}\end{cases}$ 得 $\mathbf{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$（为任意常数）

（21）（本题满分 11 分）

设 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$。求 a 的值及一个正交矩阵 Q

【解析】

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\quad f(x_1,x_2,x_3)=\mathbf{x}^T\mathbf{Ax}$$

因为 $\lambda_3=0$，所以 $|\mathbf{A}|=0$

由 $|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -4\\ 1 & -1 & 1\\ -4 & 1 & a\end{vmatrix}=-3(a-2)=0$ 得 $a=2$

由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$ 得 $\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$

由 $-3\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_1=-3$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

由 $6\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_2=6$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

由 $0\mathbf{E}-\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$ 得

$\lambda_3=0$ 对应的线性无关的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

单位正交化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{\gamma}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$

故正交矩阵为 $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\0,其他\end{cases}$，

（1）求 $P\{Y\le EY\}$（2）$Z=X+Y$ 的概率密度

【解析】

(1) $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\bullet 2ydy=2\bullet\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$$P\left[Y \le E(Y)\right] = P\left(Y \le \frac{2}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f_Y(y)dy = \int_0^{\frac{2}{3}} 2ydy = \frac{4}{9}$$

(2)求 Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X+Y \le Z)$$

$$= P(x=0)P(X+Y \le Z | X=0) + P(x=2)P(X+Y \le Z | X=2)$$

$$= \frac{1}{2}\left[P(Y \le Z) + P(Y \le Z-2)\right]$$

当 $Z<0$ 时，$F_Z(z)=0$

当 $0 \le Z < 1$ 时，$F_Z(z) = \frac{1}{2}\int_0^z 2ydy = \frac{1}{2}z^2$

当 $1 \le Z < 2$ 时，$F_Z(z) = \frac{1}{2}$

当 $2 \le Z < 3$ 时，$F_Z(z) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{z-2} 2ydy + 1\right) = \frac{1}{2}\left(z^2 - 4z + 5\right)$

当 $z \ge 3$ 时，$F_Z(z) = 1$

故

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z<0 \\ \frac{1}{2}z^2, 0 \le z < 1 \\ \frac{1}{2}, 1 \le z < 2 \\ \frac{1}{2}\left(z^2 - 4z + 5\right) \\ 1, z \ge 3 \end{cases}$$

则 $f_Z(z) = \begin{cases} 0, z<0 \\ z, 0 \le z < 1 \\ 0, 1 \le z < 2 \\ z-2, 2 \le z < 3 \\ 0, z \ge 3 \end{cases}$

整理得： $f_Z(z) = \begin{cases} 0, z<0; 1 \le z < 2; z \ge 3 \\ z, 0 \le z < 1 \\ z-2, 2 \le z < 3 \end{cases}$

（23）（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是

已知的，设n次测量的结果$x_1,x_2,\cdots,x_n$相互独立，且均服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，该工程师记录的是$n$次测量的绝对误差$z_i=\left|x_i-\mu_i\right|,\left(i=1,2,\cdots,n\right)$，利用$z_1,z_2,\cdots,z_n$估计$\sigma$

（1）求z_1的概率密度

（2）利用一阶矩求σ的矩估计量

（3）求σ得最大似然估计量

【解析】

(1)因为$X_i\sim N\left(\mu,\sigma^2\right),Y_i=X_i-\mu\sim N\left(0,\sigma^2\right)$,对应的概率密度为

$f_Y\left(y\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$,设$Z_i$的分布函数为$F\left(z\right)$;

当$z<0$时,$F\left(z\right)=0$;

当$z\geq 0$时,$F\left(z\right)=P\left\{Z_i\leq z\right\}=P\left\{\left|Y_i\right|\leq z\right\}=P\left\{-z\leq Z_i\leq z\right\}=\int_{-z}^{z}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy$;

则Z_i的概率密度为$f\left(z\right)=F^{'}\left(z\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}},z>0\\0,z\leq 0\end{cases}$;

(2)因为$EZ_i=\int_0^{+\infty}z\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz==\dfrac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$,所以$\sigma=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}EZ_i$,从而$\sigma$的矩估计量为

$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}Z_i=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\overline{Z}$

由题知对应的似然函数为$L\left(z_1,z_2,\cdots z_n;\sigma\right)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}$,取对数得:

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\ln\sigma-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right)=n\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^2\right),$$

所以$\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\dfrac{n}{\sigma}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(z_i^2\right)}{\sigma^3}$,令

$\dfrac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=0$,得$\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$,所以$\sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$.