

华侨大学 2014 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析 科目代码 723

一、(16分) 求下列极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan^3 x} - 1}{(1 - \cos x)(e^x - 1)}$$

二、(10分) 求由 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 的二阶导数

三、(12分) 设函数 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上二阶可导函数, $f(a) = f(b) = 0$, 且 $\int_a^b f(x) dx > 0$,

证明: $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $f''(\xi) < 0$.

四、(10分) 叙述区间套定理并用单调有界定理证明之.

五、(16分) 求下列积分

$$(1) \int x^2 \arctan x dx \quad (2) \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$$

六、(13分) 设 f 在区间 Δ 上有界, 证明

$$\sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{x \in \Delta} f(x) = \sup_{x', x'' \in \Delta} |f(x') - f(x'')|.$$

七、(8分) 求函数 $f(x, y, z) = xyz$ 在点 $P_0(5, 1, 2)$ 沿到点 $P_1(9, 4, 14)$ 的方向导数.

八、(10分) 设 f 具有二阶连续偏导数, 记 $z = f\left(2x, \frac{x}{y}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析 科目代码 723

九、(12分) 计算 $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$, 其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的上侧.

十、(8分) 判别级数 $\sum (\frac{n}{2n+1})^n$ 的敛散性.

十一、(10分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛域及和函数.

十二、(10分) 证明: 含参量反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2} dx$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

十三、(15分) 设 S 为光滑闭曲面, V 为 S 所围成的区域, 函数 $u(x, y, z)$ 在 V 与 S 上具有二阶连续偏导数, 函数 $w(x, y, z)$ 偏导连续, 证明

$$\iiint_V w \Delta u dx dy dz = \iint_S w \frac{\partial u}{\partial n} dS - \iiint_V \nabla u \cdot \nabla w dx dy dz$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 外法线方向的方向导数.