

华侨大学 2013 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数

科目代码 823

一、(20 分) 讨论 a 取什么值时, 下述线性方程组有解? 当有无穷多解时, 求出其解.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases}$$

二、(25 分) 作正交变换, 把下述二次曲面方程化成标准方程, 并且指出它是什么曲面?

$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 8xz - 4yz = 0.$$

三、(20 分) 设 $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 2$, $g(x) = 3x^2 - 5x - 2$, 求首项系数为 1 的最大公因式 $(f(x), g(x))$, 并且把它表示成 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合.

四、(30 分)

(1) 证明: 数域 K 上幂等矩阵的秩等于它的迹.

(2) 证明: 设 V 是数域 K 上的线性空间, σ 是 V 上的一个幂等变换 (即 $\sigma^2 = \sigma$), 则

$$V = \text{Ker } \sigma \oplus \text{Im } \sigma.$$

五、(15 分) 证明: 方阵 A 正定的充分必要条件是: 存在一个正定矩阵 C 使得

$$A = C^2.$$

招生专业 基础数学

科目名称 高等代数

科目代码 823

六、(25 分)

(1) 证明：任一 n 级复矩阵一定相似于一个上三角矩阵.

(2) 证明：Hamilton-Cayley 定理，即数域 K 上的方阵 A 的特征多项式是 A 的一个零化多项式.

七、(15 分) 写出矩阵可对角化的 5 个充分必要条件.