

华侨大学 2013 年硕士研究生入学考试专业课试卷

(答案必须写在答题纸上)

招生专业 基础数学

科目名称 数学分析

科目代码 723

1. (共 24 分, 每小题 8 分) 求下列极限.

(1). $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$;

(2). $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$;

(3). $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. (10 分) 设 $f(x)$, $g(x)$ 为 D 上的有界函数. 证明:

$$\sup_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \leq \sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\}.$$

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 为有限值.

证明: $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

4. (共 18 分, 每小题 9 分) 计算下列积分.

(1). $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$;

(2). $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$.

5. (10 分) 研究函数

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

的高阶导数.

6. (15分) 讨论积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx$ 的收敛性.
7. (10分) 计算积分 $\iint_S xyz dS$, 其中 S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限中的部分.
8. (10分) 求曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在点 $(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}})$ 处的切平面与法线方程.
9. (10分) 求函数 $\frac{x}{1+x-2x^2}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并确定它的收敛域.
10. (10分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{-xdx + ydy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为依反时针方向通过圆周 $x^2 + y^2 = 1$.

11. (8分) 设 S 为光滑闭曲面, V 为 S 所围区域, 函数 $u(x, y, z)$ 在 V 与 S 上具有二阶连续偏导数, 函数 $\omega(x, y, z)$ 偏导连续. 证明:

$$\iiint_V \omega \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz = \iint_S u \omega dy dz - \iiint_V u \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dy dz .$$

12. (10分) 证明: 若 $f(x, y)$ 有界闭区域 D 上连续, $g(x, y)$ 在 D 上可积且不变号, 则存在一点 (ξ, η) , 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y)d\sigma = f(\xi, \eta)\iint_D g(x, y)d\sigma .$$