一、填空题（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1、若$\boldsymbol{a}$是$\boldsymbol{f'(x)}$的$\boldsymbol{k-1}$重根且__________，则$\boldsymbol{a}$是$\boldsymbol{f(x)}$的$\boldsymbol{k}$重根。

2、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=$____________________________。

3、线性方程组$\boldsymbol{A_{m\times n}x=b}$满足______________条件，必有无穷多解。

4、$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\underline{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} c_1 & a_1+2b_1 & a_1 \\ c_2 & a_2+2b_2 & a_2 \\ c_3 & a_3+2b_3 & a_3 \end{pmatrix}$。

5、 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$的矩阵是______________。

6、 设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间 V 的一个基，线性变换$\sigma$在此基下对应的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则$\sigma$在基$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3$下对应的矩阵为$\underline{\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \end{pmatrix}}$。

7、设3阶矩阵A的特征值分别为1、2、3，则$\left|A^*+A^{-1}+2A-3E\right|=$_______。

8、V_1,V_2都是 V 的线性子空间，$V_1+V_2=V_1\oplus V_2$成立的充要条件为_____。

二、选择题（本题共 7 小题，每小题 4 分，共 28 分）

1. 设$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$（这里$a\neq 0$，a、b、c、d 为实数），则［　　］。

（A）至少有一个有理根；　　（B）至少有一个实根；

（C）存在一对实共轭复根；　　（D）有三个实根。

2.设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$，线性方程组$\boldsymbol{Ax=b}$有解，则行列式$\left|\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{b}\right|=$［　　］。

（A）－1；　　（B）0；　　（C）1；　　（D）2。

3.设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$，下列向量中不能被$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示的是［　　］。

（A）$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$；（D）以上结论（A）（B）（C）均不正确。

4. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵，则下列等式成立的是［　　］。

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　　（B）$(\boldsymbol{AB})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^T$；

（C）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；　　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})$。

5.下列矩阵中能相似于对角矩阵的矩阵是（　　）。

（A）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$。

6.设 A 是 n 维向量空间 V 上的线性变换，且$\dim AV+\dim A^{-1}(0)=\dim V$，则（　　）。

（A）$AV+A^{-1}(0)=V$；　　（B）$AV\oplus A^{-1}(0)=V$；

（C）$AV\cap A^{-1}(0)$不一定等于$\{0\}$；　　（D）$AV\cap A^{-1}(0)=\{0\}$。

7. 设实方阵 A 与单位合同，则下列结论中必定成立的是（ ）。

（A）$|A|<0$；　（B）$|A|=0$；　（C）$|A|>0$；　（D）不确定。

三、解答题（本题共 7 小题，满分 90 分，解答应写出文字说明、演算步骤）

1.（10 分）计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

2．（13 分）设四阶方阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，且矩阵 A 满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^T C^T = E$，其中 E 为四阶单位矩阵，求 A。

3.（11 分）已知向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}, \alpha_4=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_5=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$，求其一个极大无关组，并把其余向量表示成所求得的极大线性无关组的线性组合。

4.（15 分）设二维线性空间中，线性变换 σ_1 对基 $\alpha_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，线性变换 σ_2 对基 $\beta_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$。求

（1）变换 $\sigma_1\sigma_2$ 在 α_1, α_2 下的矩阵；

（2）变换 $\sigma_1+\sigma_2$ 在 β_1, β_2 下的矩阵。

5.（14 分）设$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，（1）求 A 的特征值；（2）求 A 的一个标准正交的特征向量系。

6.（13 分）设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\0\\3\\0\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}4\\1\\3\\1\end{pmatrix}$，令

$W_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$W_2=L(\beta_1,\beta_2)$，求$W_1+W_2$的维数和一个基。

7.（14 分）A,$B\in P^{n\times n}$且A的特征值两两相异，则A的特征值恒为B特征向量的充要条件是$AB=BA$。

【完】