高等数学公式

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(ctgx)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C$$

$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shxdx = chx + C$$

$$\int chxdx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

一些初等函数：

$$双曲正弦: shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$双曲余弦: chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$双曲正切: thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$arshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$archx = \pm\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$arthx = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045\ldots$$

三角函数公式：

三角函数： 正弦函数$\sin x$；余弦函数$\cos x$；

正切函数 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$；余切函数 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$；

正割函数 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$；余割函数 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

·诱导公式：

函数 角 A	sin	cos	tg	ctg
-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
90°-α	cosα	sinα	ctgα	tgα
90°+α	cosα	-sinα	-ctgα	-tgα
180°-α	sinα	-cosα	-tgα	-ctgα
180°+α	-sinα	-cosα	tgα	ctgα
270°-α	-cosα	-sinα	ctgα	tgα
270°+α	-cosα	sinα	-ctgα	-tgα
360°-α	-sinα	cosα	-tgα	-ctgα
360°+α	sinα	cosα	tgα	ctgα

常用三角函数公式：

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \qquad 2\sin x\cos x = \mathrm{si}$$

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \qquad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$ $\quad \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

·和差角公式：

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha \pm \beta) = \frac{ctg\alpha \cdot ctg\beta \mp 1}{ctg\beta \pm ctg\alpha}$$

·和差化积公式：

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

反三角函数： $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin x$：定义域$[-1,1]$，值域$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$； $\arccos x$：定义域$[-1,1]$，值域$[0,\pi]$；

$\arctan x$：定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$； $\operatorname{arccot} x$：定义域$(-\infty,+\infty)$，值域$(0,\pi)$

·反三角函数性质： $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ $\qquad arctgx = \frac{\pi}{2} - arcctgx$

·倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$tg 3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}$$

·半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

·正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ $\qquad$ **·余弦定理：** $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$　　　　$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k + \cdots + b^n$$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$\mathrm{F}(x) = x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$，其中$y' = tg\alpha$

平均曲率：$\overline{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. $\Delta\alpha$：从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长。

M点的曲率：$K = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right| = \dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K = 0$;

半径为a的圆：$K = \dfrac{1}{a}$.

定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{n}[\dfrac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + \cdots + y_{n-1}]$

抛物线法：$\int_a^b f(x) \approx \dfrac{b-a}{3n}[(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W = F \cdot s$

水压力：$F = p \cdot A$

引力：$F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}, k$为引力系数

函数的平均值：$\bar{y} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi, \varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \Pr j\vec{a}_1 + \Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$，是一个数量,

两向量之间的夹角：$\cos\theta = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} \cdot \sqrt{b_x{}^2 + b_y{}^2 + b_z{}^2}}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\theta$.例：线速度：$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$.

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos\alpha, \alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases}x=x_0+mt\\y=y_0+nt\\z=z_0+pt\end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$，（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx dz=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\frac{F_x}{F_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{F_x}{F_y})\cdot\frac{dy}{dx}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ $\qquad J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\\z=\omega(t)\end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$，则切向量$\vec{T}=\{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$

3、过此点的法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\quad f_{xy}(x_0,y_0)=B,\quad f_{yy}(x_0,y_0)=C$

则：$\begin{cases}AC-B^2>0\text{时},\begin{cases}A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值}\\A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值}\end{cases}\\AC-B^2<0\text{时}, & \text{无极值}\\AC-B^2=0\text{时}, & \text{不确定}\end{cases}$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面$z=f(x,y)$的面积$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

平面薄片的重心：$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$，　　$\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$，　　对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标：$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\\ z=z\end{cases}$　　$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\theta,z)rdrd\theta dz,$

其中：$F(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)$

球面坐标：$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta,\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$　　$dv=rd\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot d\theta\cdot dr=r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz=\iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\sin\varphi dr$$

重心：$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho dv$，　$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho dv$，　$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho dv$，　其中$M=\bar{x}=\iiint_\Omega\rho dv$

转动惯量：$I_x=\iiint_\Omega(y^2+z^2)\rho dv$，　$I_y=\iiint_\Omega(x^2+z^2)\rho dv$，　$I_z=\iiint_\Omega(x^2+y^2)\rho dv$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，　$(\alpha\le t\le\beta)$,则：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\quad(\alpha<\beta)$$　　特殊情况：$\begin{cases}x=t\\ y=\varphi(t)\end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx+Qdy=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$

当$P=-y,Q=x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积：$A=\iint_D dxdy=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如$(0,0)$，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx+Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy，通常设x_0=y_0=0。$$

曲面积分：

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iint_\Sigma (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y' = f(x,y)$　或　$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy = f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$　　得：$G(y) = F(x) + C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \varphi(x,y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，解法：

设$u = \frac{y}{x}$，则$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，$u + \frac{du}{dx} = \varphi(u)$，$\therefore \frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u) - u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，

即得齐次方程通解。

一阶线性微分方程：

1、一阶线性微分方程：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$

$$\begin{cases} \text{当}Q(x) = 0\text{时,为齐次方程，}y = Ce^{-\int P(x)dx} \\ \text{当}Q(x) \neq 0\text{时，为非齐次方程，}y = (\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C)e^{-\int P(x)dx} \end{cases}$$

2、贝努力方程：$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, (n \neq 0,1)$

全微分方程：

如果$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$中左端是某函数的全微分方程，即：

$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$，其中：$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$

$\therefore u(x,y) = C$应该是该全微分方程的通解。

二阶微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P(x)\frac{dy}{dx} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0\text{时为齐次} \\ f(x) \neq 0\text{时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)\, y'' + py' + qy = 0$，其中p,q为常数；

求解步骤：

1、写出特征方程：$(\Delta) r^2 + pr + q = 0$，其中$r^2$，$r$的系数及常数项恰好是$(*)$式中$y'', y', y$的系数；

2、求出(Δ)式的两个根r_1, r_2

3、根据r_1,r_2的不同情况，按下表写出(*)式的通解：

r_1，r_2的形式	(*)式的通解
两个不相等实根$(p^2-4q>0)$	$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$
两个相等实根$(p^2-4q=0)$	$y=(c_1+c_2x)e^{r_1x}$
一对共轭复根$(p^2-4q<0)$ $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$ $\alpha=-\frac{p}{2}$，$\beta=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$	$y=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$

二阶常系数非齐次线性微分方程

$y''+py'+qy=f(x)$，p,q为常数

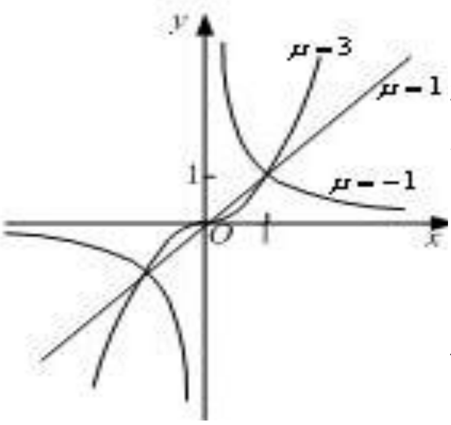
$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型，λ为常数；

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

五类基本初等函数及图形

------------------------------------ (1) 幂函数----------------------------------

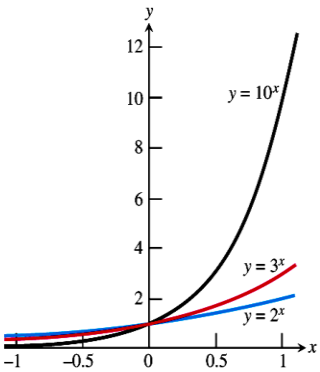
$y = x^{\mu}$，μ 是常数；

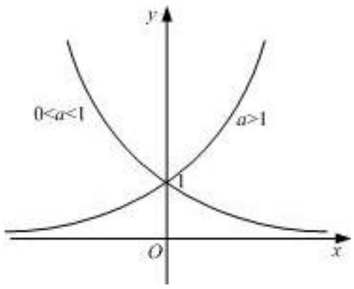


1. 当 u 为正整数时，函数的定义域为区间 $x \in (-\infty, +\infty)$，他们的图形都经过原点，并当 u>1 时在原点处与 X 轴相切。且 u 为奇数时，图形关于原点对称；u 为偶数时图形关于 Y 轴对称；
2. 当 u 为负整数时。函数的定义域为除去 x=0 的所有实数。
3. 当 u 为正有理数 m/n 时，n 为偶数时函数的定义域为（0，+∞），n 为奇数时函数的定义域为（-∞+∞）。函数的图形均经过原点和（1，1）. 如果 m>n 图形于 x 轴相切，如果 m<n，图形于 y 轴相切，且 m 为偶数时，还跟 y 轴对称；m，n 均为奇数时，跟原点对称.
4. 当 u 为负有理数时，n 为偶数时，函数的定义域为大于零的一切实数；n 为奇数时，定义域为去除 x=0 以外的一切实数.

------------------------------------ (2) 指数函数 ----------------------------------

$y = a^{x}$（a 是常数且 $a > 0$，$a \neq 1$），$x \in (-\infty, +\infty)$ ；

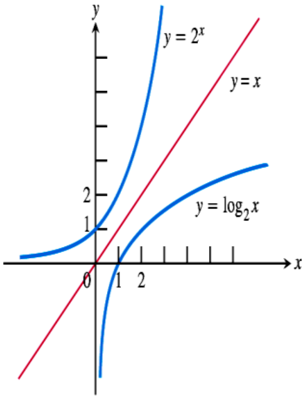


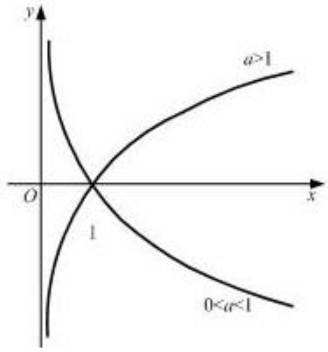


1. 当 a>1 时函数为单调增，当 a<1 时函数为单调减.
2. 不论 x 为何值，y 总是正的，图形在 x 轴上方.
3. 当 x=0 时，y=1，所以他的图形通过(0，1)点.

------------------------------------ (3) 对数函数 ----------------------------------

$y = \log_a x$（a 是常数且 $a > 0$，$a \neq 1$），$x \in (0, +\infty)$；

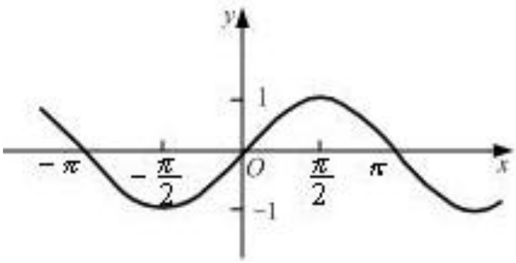




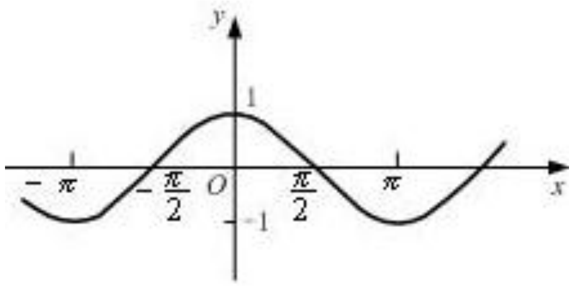
1. 他的图形为于 y 轴的右方. 并通过点(1, 0)
2. 当 a>1 时在区间(0, 1), y 的值为负. 图形位于 x 的下方, 在区间(1, $+\infty$), y 值为正, 图形位于 x 轴上方. 在定义域是单调增函数. a<1 在实用中很少用到.

-------------------------------------- (4) 三角函数 --------------------------------------

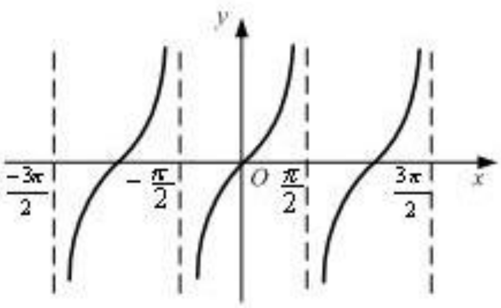
正弦 $y=\sin x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$



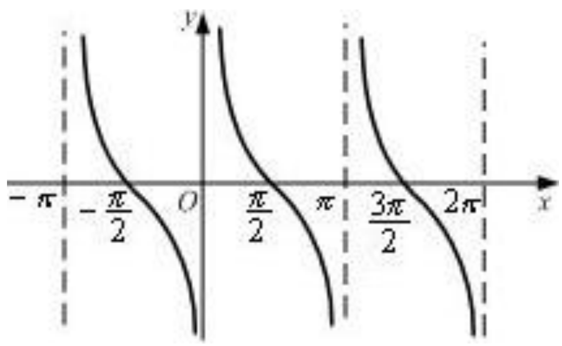
余弦 $y=\cos x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in[-1,1]$



正切 $y=\tan x$, $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$, $k\in Z$, $y\in(-\infty,+\infty)$



余切 $y=\cot x$, $x\neq k\pi$, $k\in Z$, $y\in(-\infty,+\infty)$



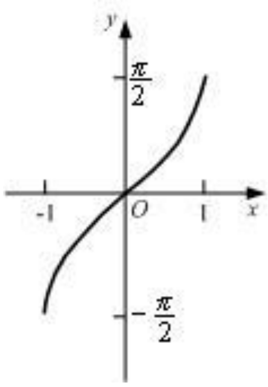
-------------------------------------- (5) 反三角函数 --------------------------------------

反正弦

$y=\arcsin x$,

$x\in[-1,1]$,

$y\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$

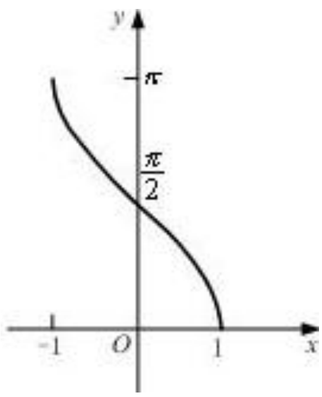


反余弦

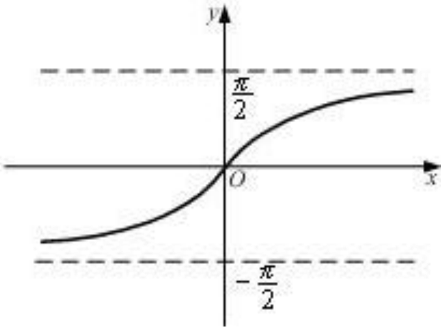
$y=\arccos x$,

$x\in[-1,1]$,

$y\in[0,\pi]$,



反正切 $y=\arctan x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$



反余切 $y=\operatorname{arc}\cot x$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $y\in(0,\pi)$