安徽师范大学

2016年招收硕士研究生考题

科目名称：高等代数　　科目代码：891

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本考题纸上的无效！

一、（15分）设 $u(x), v(x), f(x), g(x)$ 都是数域 P 上的多项式，且

$(x^4+1)f(x)+(x+1)u(x)+(x-2)v(x)=0$ ，$(x^4+1)g(x)+(x-1)u(x)+(x+2)v(x)=0$

试问：$u(x)$ 和 $v(x)$ 是否都能被 x^4+1 整除？为什么？

二、（15分）设 m, n 都是正整数且 n 大于 m ，$f(x)$ 是有理数域 Q 上的一个 m 次多项式，试问：$2^{\frac{1}{n}}$ 是不是 $f(x)$ 的实根？为什么？

三、（15分）设 n 是一个大于 1 的整数，计算 n 级行列式：
$$D_n=\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1+1} & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \frac{a_2}{a_2+1} & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_n}{a_n+1} & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

四、（15分）设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，向量 $\beta_1=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，$\beta_2=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$，$\beta_3=k_1\alpha_3+k_2\alpha_4$，$\beta_4=k_1\alpha_4+k_2\alpha_1$ ，试问：常数 k_1, k_2 满足什么条件时，向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关.

五、（15分）设 n 是一个正整数，A, B 都是 n 级实对称矩阵，证明：

1、（5分）矩阵 A 的特征值都是实数；

2、（10分）若矩阵 A 的特征值都大于 a，矩阵 B 的特征值都大于 b，则矩阵 $A+B$ 的特征值都大于 $a+b$.

六、(20 分) 设向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是线性方程组$Ax=b$的$s$个解，其中$b$是非零向量，证明：

1. (10 分) 若常数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$，则$\sum_{i=1}^{s}k_i=0$；

2. (10 分) 若常数$h_1,h_2,\cdots,h_s$，使得$\sum_{i=1}^{s}h_i\alpha_i$是线性方程组$Ax=b$的解，则$\sum_{i=1}^{s}h_i=1$.

七、(20 分) 设向量组α,β,γ是线性空间V的一组基，σ是线性空间V的线性变换，且

$\sigma\alpha=\alpha+\beta+\gamma,\sigma\beta=\beta+\gamma,\sigma\gamma=\gamma$.

1. (10 分) 证明：σ是V的一个可逆线性变换；
2. (10 分) 求线性空间V的线性变换$3\sigma-2\sigma^{-1}$在V的基α,β,γ下的矩阵.

八、(20 分) 设n是一个正整数，A是一个秩为r的n级方阵，满足$A^2=A$，E是n级单位矩阵.

1. (15 分) 求矩阵$A+E$的行列式;
2. (5 分) 证明：矩阵A的迹是r.

九、(15 分) 设n是一个正整数，A,B都是数域P上的n级方阵，且$AB=BA$，又有一个正整数m使得$A^m=0$，证明：矩阵$A+B$的行列式等于矩阵B的行列式，即：$|A+B|=|B|$.