安徽师范大学

2016 年招收硕士研究生考题

科目名称：高等数学 I　科目代码：615

考生请注意：答案必须写在答题纸上，写在本考题纸上的无效！

一、填空题（每小题 3 分，共 30 分，把答案填在答题纸上）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=$______.

2. 设 $\begin{cases} x=t^2+5, \\ y=t^2+4t+2, \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$______.

3. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$______.

4. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为______.

5. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=$______.

6. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=1$ 所围成图形的面积为______.

7. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x，则 $\int_0^1 xf'(1-x^2)\mathrm{d}x=$______.

8. 一阶微分方程 $xy'-y=x^3$ 的通解为______.

9. 设 A 是 3 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，A 的行列式 $|A|=\dfrac{1}{4}$，则行列式 $|3A^*|=$______.

10. 已知 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$A^*$ 为 A 的伴随矩阵，$B=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&a\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，若 A^*B 的秩为 2，则 $a=$______.

二、 (本题 10 分) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+b\sin^2 x}{x(e^x-1)}=1$，求常数 a, b.

三、(本题 10 分)求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}\mathrm{d}t$ 的最大值与最小值.

四、(本题 10 分) 求函数 $z=3+x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$ 的极值点.

五、(本题 15 分)求二重积分 $I=\iint\limits_D \dfrac{xe^{x^2+y^2}}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D: x^2+y^2\le 1,\ x>0,\ y>0$.

六、(本题 15 分)（1）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数；（2）求无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}$ 的和.

七、(本题 15 分)已知向量组 $\beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\beta_2=\begin{pmatrix}a\\2\\1\end{pmatrix}$，$\beta_3=\begin{pmatrix}b\\1\\0\end{pmatrix}$ 与向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}9\\6\\-7\end{pmatrix}$ 有相同的秩，且 β_3 可由 α_1，α_2，α_3 线性表出，求 a, b 的值.

八、(本题 15 分)已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2t+1,\\ x_1\qquad -x_3=5t+5,\\ \quad -3x_2\qquad =4t+2.\end{cases}$ 求 t，使方程组有解， 且求出通解.

九、(本题 15 分)设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ -x\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（1） 求随机变量 Y 的密度函数 $f_Y(y)$；

（2） 求 $P(X-Y\le 1)$.

十、(本题 15 分)设随机变量 X 的密度函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令 $Y=\begin{cases}2-X, & X\le 1,\\ X, & X>1.\end{cases}$ 求 $E(XY)$.