概率论与数理统计
强化讲义

（数一）

课程配套讲义是学习的必备资源，帮帮为大家精心整理了高质量的配套讲义，确保同学们学习的方便与高效。该讲义是帮帮结合大纲考点及考研辅导名师多年辅导经验的基础上科学整理的。内容涵盖考研的核心考点、复习重点、难点。结构明了、脉络清晰，并针对不同考点、重点、难点做了不同颜色及字体的标注，以便同学们复习时可以快速投入、高效提升。

除课程配套讲义外，帮帮还从学习最贴切的需求出发，为大家提供以下服务，打造最科学、最高效、最自由的学习平台：

服务项目	**服务内容**
名师高清视频课	零距离跟名师学习，精讲考点，突出重点，拿下难点，掌握方法
习题+月考+模考	精选配套习题，灵活自测，查缺补漏，时时提升
真题视频解析	精选整理了近十几年的真题+答案，视频详解近五年真题
复习规划指导	名师零距离直播/录播指导全程考研复习规划
24 小时内答疑	24 小时内详尽解答您复习中的疑点难点，确保学习无阻碍

把青春托付给值得信任的平台！

祝：复习愉快，天天高效，考研成功！

PS:讲义中的不足之处，欢迎各位研研批评指正，我们将竭尽所能追求更好！

目录

第一章 随机事件与概率

题型一 概率的基本计算

方法点拨 1：
随机事件间的关系与运算中，有两条比较重要：一是对偶律,二是在事件运算中，先积后和可以变为先和后积。

$\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcap\bar{B},\overline{A\bigcap B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$

例 1. $\overline{\bar{A}\bigcap\left(B\bigcup\bar{C}\right)}=$ ______

（A） $A\cap\left(\bar{B}\cap C\right)$

（B） $A\cap\left(B\cap C\right)$

（C） $\left(A\cup\bar{B}\right)\cap\left(A\cup C\right)$

（D） $\left(A\cup B\right)\cap\left(A\cup C\right)$

【答案】选项 C
方法点拨 2：
下题考查事件与概率的关系，概率是对事件的一种预测，因此，已知概率一般不能推出事件，但是已知事件，可以计算相关概率。

例 2.事件满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 和 $P\left(A\bigcup B\right)=1$ 则有 ______

（A） $A\bigcup B=\Omega$

（B） $A\bigcup B=\Omega$

（C） $P(\bar{A}\bigcup\bar{B})=1$

（D） $P(A-B)=0$

【答案】选项 C
方法点拨 3：
A,B 互不相容，只说明 $AB=\varnothing$,但并不一定满足 $A\cup B=\Omega$,即互不相容的两个事件不一定是对立事件；另外，遇到逆，还应注意对偶律的应用。

例 3.设事件互不相容，则 ______

（A） $P\left(\bar{A}\bar{B}\right)=0$

（B） $P(AB)=P(A)P(B)$

（C） $P(A)=1-P(B)$

（D） $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【答案】选项 D

方法点拨 4:

要分析事件的关系，用简单事件运算去表示复杂事件，而后应用概率性质计算概率．由于 $A=\{\max(X,Y)\geq 0\}=\{X,Y\text{至少有一个大于等于}0\}=\{X\geq 0\}\cup\{Y\geq 0\}$

例 4.设 X，Y 为 2 个随机变量，且 $P\{X\geq 0,Y\geq 0\}=\frac{3}{7}$, $P\{X\geq 0\}=P\{Y\geq 0\}=\frac{4}{7}$,

则 $P\{\max(X,Y)\geq 0\}=$___

【答案】 $\dfrac{5}{7}$

例 5. 设 A,B,C **是两两独立的随机事件，**

$ABC=\phi$， $P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2}$, $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, **求** $P(A)$

【答案】 $\dfrac{1}{4}$

例 6.设 A,B,C 是随机事件，且

$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$, $P(AC)=P(BC)=\frac{1}{6}$, $P(AB)=0$, 求 A，B，C 都不发生的概率.

【答案】 $\dfrac{7}{12}$

例 7.设相互独立的事件 A，B 都不发生的概率是 $\frac{1}{9}$，且 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，求 A 发生的概率.

【答案】 $\dfrac{2}{3}$

题型二 几何概型

方法点拨：

三大概型是指古典概型、几何概型、伯努利概型。古典概型就是常说的排列组合问题，考的少，几何概型注意体积、面积的计算，伯努利概型，需要注意一下“至多”和“至少”的问题。

例 1.在区间$\left(-1,1\right)$之间任取两个数 X，Y 则二次方程$t^2+Xt+Y=0$有两个正根的概率为____

【答案】$\frac{1}{48}$

题型三 条件概率与独立性

方法点拨：

条件概率是概率，概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用。

事件相互独立的概念是概率论中的一个重要概念，一般总是由试验的方式来判定试验的独立性，进而判定事件的相互独立性，再应用事件独立性定义中所揭示的概率关系计算与之有关的事件的概率。

例 1.已知$0<P\left(B\right)<1,P\left[\left(A_1+A_2\right)|B\right]=P\left(A_1|B\right)+P\left(A_2|B\right)$则下列选项中正确的是____

（A）$P\left[\left(A_1+A_2\right)|\overline{B}\right]=P\left(A_1|\overline{B}\right)+P\left(A_2|\overline{B}\right)$

（B）$P\left(A_1B+A_2B\right)=P\left(A_1B\right)+P\left(A_2B\right)$

（C）$P\left(A_1+A_2\right)=P\left(A_1|B\right)+P\left(A_2|B\right)$

（D）$P\left(B\right)=P\left(A_1\right)P\left(B|A_1\right)+P\left(A_2\right)P\left(B|A_2\right)$

【答案】选项 B

例 2.设 A,B 是两个随机事件，$0<P\left(A\right)<1,\ P\left(B\right)>0,P\left(B|\overline{A}\right)=P\left(B|A\right),$则下列选项中正确的是____

（A）$P\left(A|B\right)=P\left(\overline{A}|B\right)$

（B）$P\left(A|B\right)\neq P\left(\overline{A}|B\right)$

（C）$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$

（D） $P(AB)\neq P(A)P(B)$

【答案】选项 C

例 3 $P(\overline{A})=0.3,P(B)=0.4,P(A\overline{B})=0.5$，则$P(B|A\cup\overline{B})=$___

【答案】$\frac{1}{4}$

例 4.设 $P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1$ 则___

（A）A,B 互不相容

（B）A,B 互逆

（C）A,B 相互独立

（D）A,B 不独立

【答案】选项 C

例 5 $P(A)=\frac{1}{4},P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$, 则$P(A\cup B)=$___

【答案】 $\frac{1}{3}$

例 6.将一枚硬币连续投掷两次，定义事件 A_1：第一次出现正面，A_2：第二次出现正面，A_3：正反面各出现一次，A_4：两次都是出现正面，则下列说法正确的是___

（A） A_1,A_2,A_3 相互独立

（B） A_2,A_3,A_4 相互独立

（C） A_1,A_2,A_3 两两独立

（D） A_2,A_3,A_4 两两独立

【答案】选项 C

题型四 全概率公式与贝叶斯公式

方法点拨：

（1）全概率公式常用于计算一个复杂事件的概率，使用全概率公式有两个前提条件：

第一，事件 B 的概率计算需要补充信息，它常伴随另一组事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的

发生而发生；

第二，这组伴随的事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 构成完备事件组.

（2）全概率公式与贝叶斯公式分为两个阶段：
全概率公式是求第二阶段某一结果的概率；而贝叶斯公式则是已知第二阶段的某一结果的概率，求第一阶段的某一结果的概率.

例 1 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽取一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的次品的概率为________

【答案】$\frac{1}{6}$

例 2.在 1,2,3,4 中任取 1 个数为 X，再从 1，⋯，X 中任取一个数为 Y，则 $P\{Y=2\}=$___

【答案】$\frac{13}{48}$

例 3.设工厂 A,B 的产品的次品率分别为 1%和 2%，现在从由产品 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取 1 件

（1）求该产品是次品的概率；

（2）已知取出为次品，求该次品属于 A 生产的概率.

【答案】$(1)0.014;(2)\frac{3}{7}$

例 4.设有甲、乙两个箱子，甲箱子中有 m 只白球，n 个红球，乙箱中有 a 个白球，b 个红球，现从甲箱中任意取出一只放入乙箱，再从乙箱中任取出一球，求

（1）从乙中取出的是白球的概率；

（2）已知从乙中取出的是白球，从甲放入乙中的是白球的概率；

（3）已知从乙中取出的是白球，从甲放入乙中的是红球的概率.

【答案】$(1)\frac{m(a+1)+na}{(a+b+1)(m+n)}(2)\frac{m(a+1)}{m(a+1)+na}(3)\frac{na}{m(a+1)+na}$

例 5.甲乙两名运动员进行打靶训练，每次打靶甲中靶的概率为 0.5，乙中靶的概率为 0.3，甲乙两人都中靶的概率为 0.2，每次打靶中只要有一人中靶就称为此次打靶合格，第 n 次（n>3）打靶合格恰好是第 3 次合格的概率 $\alpha=$___

【答案】$C_{n-1}^{2}0.6^{3}0.4^{n-3}$

例 6 设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试，经调试后，以概率 0.8 出厂，以概率 0.2 定为不合格，不能出厂，现该厂生产了 $n\,(n\geq 2)$ 台仪器（设各台生产过程相互独立）. 求

(I)所有机器都能出厂的概率α.

(II)其中恰好有两件不能出厂的概率β.

(III)至少有两件不能出厂的概率θ

【答案】(I) 0.94^n (II) $C_n^2 0.94^2 0.06^{n-2}$ (III) $1-\left[C_n^0 0.94^n 0.06^0+C_n^1 0.94^{n-1} 0.06\right]$

第二章 随机变量及其分布

题型一 分布函数的性质与计算

方法点拨：

如果已知 X 的分布函数$F(x)$，则$P\{X\le a\}=F(a)$ ，$P\{X<a\}=F(a-0)$，由此性质可以求得 X 在任一区间内的概率。

例 1. 设随机变量 X 分布函数为$F(x)=\begin{cases}0,x<-1\\ \dfrac{1}{8},x=-1\\ ax+b,-1<x<1\\ 1,x\ge 1\end{cases}$,已知$P(X=1)=\dfrac{1}{4}$，则（ ）

(A) $a=\dfrac{5}{16},b=\dfrac{7}{16}$ (B) $a=\dfrac{7}{16},b=\dfrac{9}{16}$

(C) $a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{2}$ (D) $a=\dfrac{3}{8},b=\dfrac{3}{8}$

【答案】选项 A

例 2. 已知随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{0\le X\le 1\}=$____

$(A)0$ $(B)\dfrac{1}{2}$ $(C)\dfrac{1}{2}-e^{-1}$ $(D)1-e^{-1}$

【答案】选项 D

例 3. 设 X_1, X_2 是两个相互独立的连续型随机机变量，概率密度分别为 $f_1(x), f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x)$，则（　）

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某随机变量的概率密度

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某随机变量的分布函数

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数

【答案】选项 D

例 4. 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　　）

（A） $f_1(x)f_2(x)$　　（B） $2f_2(x)F_1(x)$

（C） $f_1(x)F_2(x)$　　（D） $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

【答案】选项 D

例 5. 设随机变量 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & else \end{cases}$

(1) 求参数 k　　(2) 求分布函数 $F(x)$

（3）求 $P\{X>2\}, P\left\{1<X\le \dfrac{7}{2}\right\}$

【答案】 $(1)\dfrac{1}{6};(2)F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3, \\ 2x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}(3)\dfrac{2}{3}$

【例 6】设随机变量 X 绝对值不超过 1， $P\{X=-1\}=\dfrac{1}{8}, P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，在事件

$\{-1\le X\le 1\}$ 的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间取值的概率与区间的长度成正比，试求

(1) X 的分布函数 $F(X)=P\{X\le x\}$；

(2) X 取负值的概率 p.

【答案】(1) $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ \frac{1}{8}+\frac{5(x+1)}{16}, & -1\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$ (2) $\frac{7}{16}$

题型二 常见随机变量

方法点拨：

常见离散型随机变量的分布有：0-1 分布、二项分布、几何分布、泊松分布，连续型随机变量的分布有：均匀分布、正态分布、指数分布，这些是考研中的常考点。

例 1. 设随机变量 X 分布律为 $P\{X=k\}=b\lambda^k\ (k=1,2,\cdots)$，且 $b>0$ 则 λ 为

（A）任意常数　　（B）$b+1$

(C) $\frac{1}{b+1}$　　（D）$\frac{1}{b-1}$

【答案】：选项 C

例 2. 盒子中有 3 只红球，2 只黑球，现从盒中任取 2 球，若取出的球中不包含黑球，则认为实验成功，否则实验失败，将取出的球放回盒中，重新抽取，直到实验成功为止，则试验次数 X 的分布律为___

【答案】 $P\{X=k\}=\left(\frac{7}{10}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{10}\right)$，k=1, 2,⋯

例 3. 设随机变量 $X\sim B(2,p), Y\sim B(3,p)$，已知 $P\{X\ge 1\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{Y\ge 1\}=$ ___

【答案】 $\frac{19}{27}$

例 4. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，随机变量 Y 服从参数为 2λ 的泊松分布，若 $P\{X\ge 1\}=1-e^{-2}$，则 $P\{Y\ge 2\}=$ ________

【答案】$1-\frac{4^0}{0!}e^{-4}-\frac{4}{1!}e^{-4}$

例 5. 随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\left\{X^2+\frac{1}{\lambda}X-\frac{2}{\lambda^2}>0\right\}=$ ___

【答案】 e^{-1}

例 6. 随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，$a>0$，则 $P\{X<a+1|X>a\}=$_ .

【答案】 $1-e^{-\lambda}$

例 7. 设随机变量 X 概率密度为 $f(x)=ae^{-x^2+2x}$，则 $a=$ ___

【答案】 $\frac{1}{\sqrt{\pi e}}$

例 8. 设随机变量 X,Y 分别服从正态分布，$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则

$(A)\sigma_1<\sigma_2$

$(B)\sigma_2<\sigma_1$

$(C)\mu_1<\mu_2$

$(D)\mu_2<\mu_1$

【答案】选项 A

例 9. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 分别服从正态分布，$X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,2^2),X_3\sim N(5,3^2)$，设 $p_i=P\{-2\le X_i\le 2\}(i=1,2,3)$ 则下列选项正确的是（ ）

$(A)\ p_1>p_2>p_3\ (B)\ p_2>p_1>p_3$

$(C)\ p_3>p_1>p_2\ (D)\ p_1>p_3>p_2$

【答案】选项 A

题型三 随机变量函数的分布

方法点拨：

随机变量函数的分布是考研中的一个考查重点，离散型随机变量函数的分布求法比较简单，连续型随机变量函数的分布求法有两种，定义法，即为分布函数法；公式法。分布函数法适用性较广，考生务必掌握。

1. 离散型：已知 X 的分布律，求 $Y=g(X)$ 的分布律布；

方法：枚举：列出 $Y=g(X)$ 所有可能取值及其相应的概率，合并取值相同的 Y

2. 连续型：已知 X 的概率密度 $f_X(x)$，$Y=g(X)$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$

（1）分布函数法: $F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}$, $f_Y(y)=F_Y^{'}(y)$

缺点：先求导再积分，计算量大

（2）公式法：若 $Y=g(X)$ 是 X 的单调可导函数，可反解出 $X=h(Y)$，Z 表示 $g(X)$ 的值域

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\cdot|h^{'}(y)|, & y\in Z \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

（3）$Y=g(X)$ 分段单调，分段运用公式法.

例 1 已知随机变量 X 的分布律如表所示，若 $Y_1=2X+1, Y_2=X^2+1$，分别求 Y_1,Y_2 的分布律.

X	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

【答案】如下表所示：

Y_1	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y_2	1	2	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$

例 2. 设随机变量 $\boldsymbol{X}$ 服从参数为 $\boldsymbol{\lambda}$ 的指数分布. 求 $\boldsymbol{Y}=1-\boldsymbol{e}^{-\lambda X}$ 的概率密度

【答案】 $f_Y(y)=\begin{cases}1, 0<y<1\\ 0, else\end{cases}$

例 3. 随机变量 X 的概率密度为, $\boldsymbol{f_X}(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<\boldsymbol{x}<0\\ \frac{1}{4}, & 0<\boldsymbol{x}<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ ， $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}^2$, 求 $\boldsymbol{Y}$ 的概率密度 $\boldsymbol{f_Y}(\boldsymbol{y})$

【答案】 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, 0\le y<1\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, 1\le y<4\end{cases}$

例 4 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ ，令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2\end{cases}$.

（I） 求 Y 的分布函数;（II）求概率 $P\{X\le Y\}$.

【答案】（I） $F_Y(y)=\begin{cases}0, y<1\\ \dfrac{y^3}{27}+\dfrac{2}{3}, 1\le y<2\\ 1, y\ge 2\end{cases}$ （II） $\dfrac{8}{27}$

第三章 多维随机变量及其分布

题型一 联合分布函数的概率

方法点拨：

对于(X,Y)而言，由(X,Y)的分布可以确定关于 X、关于 Y 的边缘分布．反之，由关于 X 和关于 Y 的边缘分布一般是不能确定(X,Y)的分布的，只有当X,Y相互独立时，由两边缘分布能确定(X,Y)的分布．

例 1. 二维随机变量 $\boldsymbol{(X,Y)}$ 的分布函数为 $\boldsymbol{F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(A+\arctan x)(B+\arctan 2y)}$，$\boldsymbol{-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty}$．分别求随机变量 $\boldsymbol{X,Y}$ 的边缘分布函数.

【答案】$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right),-\infty<x<+\infty$；

$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan 2y\right),-\infty<y<+\infty$

题型二 二维离散型随机变量

方法点拨：

求二维离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布，首先确定(X,Y)的可能取值，这一点往往很容易；重要的是应计算出取各相应值的概率，在计算概率P_{ij}时，可以考虑用古典概型直接计算或用乘法公式计算，亦可根据题设条件分析出事件$\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}$与所给条件的关系计算$P_{ij}$.

例 1. 袋子中有 1 只红球，2 只黑球，3 只白球，现有放回的从中取两次，每次取一球，以 $\boldsymbol{X,Y}$ 分别表示两次取球中取到红球与黑球的个数.

(1) 求$\boldsymbol{(X,Y)}$的联合分布律

(2) 求$\boldsymbol{Y}$ 的边缘分布

(3) 求 $\boldsymbol{X=1}$条件下$\boldsymbol{Y}$ 的分布

(4) 说明随机变量 X,Y 是否相互独立

【答案】(1)

X \ Y	0	1	2
0	1/4	1/3	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/36	0	0

(2) $P\{Y=0\}=\frac{4}{9};P\{Y=1\}=\frac{4}{9};P\{Y=2\}=\frac{1}{9};$

(3) $P\{Y=0|X=1\}=\frac{3}{5},P\{Y=1|X=1\}=\frac{2}{5}$

(4) **必不独立，** $P\{X=2,Y=2\}=0\neq P\{X=2\}\bullet P\{Y=2\}$

例 2. 设 A,B 为随机事件, 且 $P(A)=\frac{1}{4}\ P(B|A)=\frac{1}{3},P(A|B)=\frac{1}{2}$, 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生}\\0, & A\text{不发生}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生}\\0, & B\text{不发生}\end{cases}$$

(1) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

(2) 说明 X,Y 是否相互独立

【答案】(1)

X \ Y	1	0
1	1/12	1/6
0	1/12	2/3

(2) 不独立， $P\{X=1,Y=1\}\neq P\{X=1\}\bullet P\{Y=1\}$

题型三 二维连续型随机变量

方法点拨：

在求二维连续型随机变量 (X,Y) 的边缘密度及条件密度时，要特别注意积分区间

的选取，即应是使得 $f(x,y)$ 不为零的区间，先据题意画出使 $f(x,y)$ 取非零值的取值区域 D 的图形，往往可帮助正确写出积分区间。

例 1. 随机变量 (X,Y) 联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（1）求 X 的边缘概率密度 $f_X(x)$

（2）求 $X=x$ 条件下 Y 的概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$

（3）判断随机变量 X,Y 是否相互独立

（4）求 $P\{X+Y\le 1\}$

（5）求 $P\{Y\le \frac{2}{3}\Big|X\le\frac{1}{2}\}$ 和 $P\{Y\le \frac{2}{3}\Big|X=\frac{1}{2}\}$.

【答案】（1） $f_X(x)=\begin{cases}6x(1-x), 0<x<1\\ 0, else\end{cases}$

（2） $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, y<x<1\\ 0, else\end{cases}$

（3）不独立；

（4） $\frac{1}{4}$

（5） $\frac{1}{2}$； $\frac{1}{3}$

例 2. 设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_x(x)=\begin{cases}3x^2, 0<x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, 0<y<x\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（Ⅰ）求 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$

（Ⅱ）求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$

（Ⅲ）求概率 $P\{X>2Y\}$

【答案】（1） $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x},0<y<x<1\\0,else\end{cases}$

（2） $f_Y(y)=\begin{cases}9y^2(-\ln y),0<y<1\\0,else\end{cases}$

（3） $\dfrac{1}{8}$

例 3. 设随机变量 X,Y 相互独立，分别服从参数为 λ_1,λ_2 的指数分布，则 $P\{Y\le X\}=$___

【答案】: $\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$

题型四 二维正态分布

方法点拨:

牢记二维正态分布的相关性质:

（1）二维正态分布 (X,Y) 的两个边缘分布—X 的分布和 Y 的分布都是一维正态分布.

（2）二维正态分布 (X,Y) 的条件分布也是一维正态分布.

（3）两个正态分布随机变 X 和 Y 的任意线性组合 $aX+bY$（a，b 为任意实数，且不全为 0）仍服从正态分布.

（4）若随机变量 X 与 Y 的联合分布是二维正态分布，则 X 与 Y 独立的充要条件是 X 与 Y 不相关.

例 1. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则下列说法正确的是（　　）

(A) X,Y 一定相互独立

(B) X,Y 非零组合 l_1X+l_2Y 服从一维正态分布

(C) X,Y 必服从同一分布

(D) X 服从标准正态分布

【答案】选项 B

例 2. 设 (X,Y) 服从二维正态分布，且 (X,Y) 不相关，$f_X(x),f_Y(y)$ 分别为 X,Y

边缘概率密度，则$Y=y$条件下X概率密度$f_{X|Y}(x|y)$为（　　）

$(A)\ f_X(x)$　　　　　　$(B)\ f_Y(y)$

$(C)\ f_X(x)f_Y(y)$　　　　$(D)\ f_X(x)/f_Y(y)$

【答案】选项 A

例 3. 已知$(X,Y)\sim N(0,0;\frac{1}{2},\frac{1}{2};0)$

(1) $Z=X^2+Y^2$, 求随机变量Z的概率密度$f_Z(z)$

(2)求概率$P\left\{X<\frac{3-Y}{2}\right\}$

【答案】（1）$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z}, z>0\\0, else\end{cases}$（2）$\Phi\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)$

例 4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2},-\infty<x<+\infty$，$-\infty<y<+\infty$.

（1）求常数 A

（2）求条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$

（3）求概率$P(Y\le 1|X=1)$

【答案】（1）$\frac{1}{\pi}$（2）$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2xy-y^2}$（3）$\frac{1}{2}$

题型五 随机变量函数的分布

方法点拨：

本部分尤其注意卷积公式的应用，取大取小函数的概率分布，二维混合型随机变量的分布，这些问题是整个概率的一个难点问题

1. 二维离散型：已知(X,Y)联合概率分布律为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P_{ij}$，求$Z=g(X,Y)$的分布律

方法：枚举，合并

2. 二维连续型：已知(X,Y)联合概率密度为$f(x,y)$，求$Z=g(X,Y)$的概率密度

方法：

（1）分布函数法：先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)=P\{g(X,Y)\le z\}$，求导 $f_Z(z)=F_Z'(z)$

（2）卷积公式法（$Z=g(X,Y)$）

(i) $Z=X+Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

(ii) $Z=X-Y$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y+z,y)dy$$

3. 较大值与较小值

X,Y 相互独立，分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，$Z_1=\max(X,Y)$，$Z_2=\min(X,Y)$，

$$F_{Z_1}(z)=F_X(z)F_Y(z),\ f_{Z_1}(z)=\left[F_{Z_1}(z)\right]'$$

$$F_{Z_2}(z)=1-\left[1-F_X(z)\right]\left[1-F_Y(z)\right],\ f_{Z_2}(z)=\left[F_{Z_2}(z)\right]'$$

扩展到多个相互独立的随机变量

4. 离散+连续

[定义] X 为离散型，Y 为连续型，相互独立 $Z=g(X,Y)$

[结论] $F_Z(z)=\sum_i\left\{P\{X=x_i\}\int_{-\infty}^{y_i} f(y)dy\right\}$

例 1. 二维随机变量 (X,Y) 概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y,0<x<1,0<y<1\\0,\text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

(2) 求 $Z=XY$ 的概率密度 $f_Z(z)$

【答案】(1) $f_Z(z)=\begin{cases}2z-z^2,0<z<1\\(2-z)^2,1<z<2\\0,\text{else}\end{cases}$

(2) $f_Z(z)=\begin{cases}2(z-\ln z-1),0<z<1\\0,else\end{cases}$

例 2. 二维随机变量(X,Y)概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}1,0<x<1,0<y<2x\\0,\text{其他}\end{cases}$$

(1) 求 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$

(2) 求 $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$

【答案】(1) $f_X(x)=\begin{cases}2x,0<x<1\\0,else\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2},0<y<2\\0,else\end{cases}$

(2) $f_Z(z)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{z}{2}\right),0<z<2\\0,else\end{cases}$

例 3. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 分布函数为$F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$的分布函数为（　　）

$(A)F^2(x)$　　$(B)F(x)F(y)$

$(C)1-[1-F(x)]^2$

$(D)[1-F(x)][1-F(y)]$

【答案】选项 A

例 4. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，分别服从参数为 1 与 2 的指数分布，$V=\min(X,Y)$. 求随机变量V 的概率密度

【答案】 $f_V(v)=\begin{cases}3e^{-3v},v>0\\0,else\end{cases}$

例 5. 设随机变量 X,Y 相互独立， $X\sim N(0,1)$， Y 的分布为

$P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$，$Z=XY$，则其分布函数$F_Z(z)$必满足（　）

(A)为连续函数　　(B)有一个跳跃间断点

(C)有一个可去间断点　　(D)有两个间断点

【答案】选项 B

例 6. 设随机变量 X 概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量Y 服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$

(1)求随机变量Y 的分布函数

(2)求 $E(Y)$

(3)求随机变量 $Z=XY$ 的分布函数

【答案】（1） $F(y)=\begin{cases}0, y<0\\ \frac{3}{4}y, 0\le y\le 1\\ \frac{2+y}{4}, 1\le y<2\\ 1, \quad y\ge 2\end{cases}$

（2） $\frac{3}{4}$；（3） $F_Z(z)=\begin{cases}0;0\\ \frac{5}{8}z, 0\le z<1\\ \frac{4+z}{8}, \quad 1\le z<4\\ 1, \quad z\ge 4\end{cases}$

第四章　随机变量的数字特征

题型一 期望与方差的计算

方法点拨：

随机变量期望与方差的计算注意两方面，一是掌握期望与方差的性质，二是熟记常见分布的期望与方差有利于计算。

例 1. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi(\frac{x-1}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态的分布函数，则 $EX=$（ ）

（A）0　　　　（B）0.3

（C）0.7　　　　（D）1

【答案】选项C

例 2. 设 X 的分布律为 $P\{X=k\}=\frac{2^k}{3^{k+1}},(k=0,1,2\cdots)$，求期望与方差 $E(X),D(X)$.

【答案】2；6

例 3 设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上均匀分布，随机变量

$$Y=\begin{cases}1，& 若X>0\\ 0，& 若X=0\\ -1，& 若X<0\end{cases},$$

则方差 $D(Y)=$______.

【答案】 $\frac{8}{9}$

例 4 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2},0\le x\le\pi\\ 0,其他\end{cases}$,对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

例5 设 X 和 Y 相互独立，且均服从 $N(0,\frac{1}{2})$，令 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，求

(1) $E(U),\mathrm{E}(V)$；　(2) $E(U+V)$；

(3) $E(UV)$.

例6 设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为0, 方差为$\frac{1}{2}$的正态分布, 设

$Z=|X-Y|$

（1）求Z的概率密度 $f_Z(z)$

(2) 求 EZ,DZ

【答案】（1） $f_Z(z)=\begin{cases}2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}},z>0\\0,else\end{cases}$ （2） $EZ=\frac{2}{\sqrt{2\pi}},DZ=1-\frac{2}{\pi}$

例 7. 随机变量(X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$, 已知数学期望 $E(XY)$ 存在

(1) 若随机变量 X,Y 相互独立，且数学期望 EX, EY 都存在，证明 $E(XY)=E(X)E(Y)$

(2) 若 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,y>0\\0, & 其它\end{cases}$，求数学期望 $E(XY+Y)$

【答案】（1）略（2）1

例 8. 设二维随机变量(X,Y)在区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,|y|<x\}$ 上服从均匀分布，求随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

【答案】 $\frac{2}{9}$

例 9. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则 $E(X^2e^{-2X})=$___

【答案】 $\frac{2}{27}$

例 10. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，则 $E(Xe^X)=$___

【答案】 $e^{\frac{1}{2}}$

例 11. 设随机变量 $X\sim P(\lambda)$，$Y\sim P(2\lambda)$ 且 $E(X^2)=6$，则 $E(Y^2)=$ ___

【答案】20

题型二 协方差与相关系数

方法点拨：

首先应理解协方差和相关系数的概念。

协方差是描述两个随机变量之间偏差的关联程度的，相关系数是描述两个随机变量之间的线性相依性，刻画两个变量间线性相关程度的一种度量，相关系数为 0 表示二者之间不存在线性关系，但并不意味着不存在其他关系，还可能存在某种非线性关系。

例 1. 随机变量 X_1，$X_2,\cdots$，$X_n(n>1)$ 独立同分布，方差为 $\sigma^2>0$，$Y=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 则（　）

(A) $Cov(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$　　(B) $Cov(X_1,Y)=\sigma^2$

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$

【答案】选项 A

例 2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & |y|<x,0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，求

$EX,\ EY,\ Cov(\ ,X)$

【答案】 $EX=\dfrac{2}{3},EY=0,Cov(X,Y)=0$

例 3. 随机变量 (X,Y) 分别服从二维正态分布，且 $X\sim(1,3^2)$，$Y\sim(0,4^2)$，且相关系数 $\rho_{XY}=-0.5$，令 $Z=\dfrac{X}{3}+\dfrac{Y}{2}$

（1）求 $E(Z),D(Z)$

（2）求 X,Z 的相关系数，并说明是否独立

（3）求 Z 的分布

【答案】（1）$E(Z)=\frac{1}{3},D(Z)=3$

（2）$Cov(X,Z)=0$，独立；（3）略

例 4. 设随机变量 $X\sim N(0,1),Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则（　）

（A）$P\{Y=-2X-1\}=1$

（B）$P\{Y=2X-1\}=1$

（C）$P\{Y=-2X+1\}=1$

（D）$P\{Y=2X+1\}=1$

【答案】选项 D

例 5. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于（　）

$(A)-1$　　$(B)0$　　$(C)\frac{1}{2}$　　$(D)1$

【答案】选项 A

例 6. 设将一颗骰子重复抛掷 n 次，随机变量 X 表示点数小于 3 的次数，Y 表示点数不小于 3 的次数

（1）X,Y 是否独立，请说明理由

（2）说明 $X+Y$ 与 $X-Y$ 不相关

（3）求 $3X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数

【答案】（1）不独立，相关；（2）略（3）1

题型三 不相关与独立性

方法点拨：

不相关表示两个随机变量之间不存在线性关系，所以，独立一定不相关，不相关不一定独立。另外，注意，如果（X，Y）服从二维正态分布，则独立与不相关是等价的。

例 1. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，则随机变量 $\xi=X+Y,\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为（　）

(A) $EX=EY$　　(B) $EX^2-(EX)^2=EY^2-(EY)^2$

(C) $EX^2=EY^2$　　(D) $EX^2+(EX)^2=EY^2+(EY)^2$

【答案】选项 B

例 2. 随机变量 X,Y 都服从 $N(0,1)$，$U=X-Y,V=X+Y$，则随机变量 U,V 必（ ）

(A) 不独立 (B) 独立

(C) 不相关不一定独立 (D) 相关

【答案】选项 C

例 3. $(X,Y)\sim N(0,1;2,2;0.3)$，$U=X-Y,V=X+Y$，则随机变量 U,V 必（ ）

(A) 不独立

(B) 独立

(C) 不相关但不一定独立

(D) 相关

【答案】选项 B

例 4. 设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$

（1）求 EX,DX

（2）求 X 与 $|X|$ 的协方差

（3） X 与 $|X|$ 是否相互独立

【答案】（1） $EX=0,DX=2$；（2）0；（3）不独立.

第五章 大数定律和中心极限定理

题型一 切比雪夫不等式

方法点拨:

设随机变量 X 的数学期望和方差都存在$\varepsilon>0$，有 $\boldsymbol{P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$ 或

$\boldsymbol{P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$. 切比雪夫不等式给出了在随机变量 X 的分布未知，而只知道$E(X)$和$D(X)$的情况下估计概率$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}$的界限。

例 1 已知随机变量 X 的密度函数为偶函数， $D(X)=1$，且用切比雪夫不等式估计得 $P\{|X|<\varepsilon\}\geq 0.96$，则常数$\varepsilon=$______.

【答案】5

例 2 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别-2 和 2，方差分别 1 和 4，而相关系数为-0.5，则根据切比雪夫不等式有 $P\{|X+Y|\geq 6\}\leq$____

【答案】$\frac{1}{12}$

题型二 大数定律

方法点拨:

对于大数定律，主要应该了解各不同大数定律的条件，注意它们间条件的区别. 切比雪夫大数定律中虽然只要求$X_1,X_2,\cdots$相互独立而不要求具有相同的分布，但是对于方差却要求是一致有界的. 伯努利大数定律要求$X_1,X_2,\cdots$不仅相互独立同分布，而且要求它们都服从同参数的$0-1$分布. 辛钦大数定律并不要求X_i方差的存在性，但要求$X_1,X_2,\cdots$不仅相互独立，而且要有相同的分布，且期望存在.

例 1. 设随机变量序列$\boldsymbol{X_1,X_2,\cdots X_n,\cdots}$相互独立且服从参数为$\boldsymbol{\lambda}$的指数分布，下

面随机变量序列中不满足切比雪夫大数定律条件是（　　）

$(A)\ X_1,\cdots X_n,\cdots$ 　　　$(B)\ X_1+1\cdots X_n+n,\cdots$

$(C)\ X_1,\cdots nX_n,\cdots$ 　　　$(D)\ X_1,\cdots\frac{1}{n}X_n,\cdots$

【答案】选项 C

例 2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量序列，$X_k\ (k=1,2,\cdots n,\cdots)$ 服从参数为 2 的指数分布，则当 $n\to\infty$ 时 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于________

【答案】$\frac{1}{2}$

题型三 中心极限定理

方法点拨:

设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，且数学期望和方差存在：$E(X_k)=\mu,D(X_k)=\sigma^2>0(k=1,2,\cdots)$，则对任意实数 x，恒有 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu\right)\le x\right\}=\Phi(x)$ 其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

【注】①定理的三个条件:“独立、同分布、数学期望与方差存在”，缺一不可.

②只要 X_n 满足定理条件，那么当n很大时，独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，由此可知：当 n 很大时有 $P\{a\le\sum_{i=1}^{n}X_i\le b\}\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)$，这常常是解题的依据．只要题目涉及独立同分布随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}X_i$，就要考虑中心极限定理.

例1. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，根据列维—林德柏格中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n$（　）

(A) 有相同数学期望.　(B) 有相同的方差

(C)服从同一指数分布 (D)服从同一离散分布

【答案】选项 C

例 2. 设 $X_1,X_2\cdots X_n\cdots$为相互独立随机变量,且均服从参数为λ指数分布，则

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x)$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le x\right)=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x)$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\dfrac{\lambda^2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right)=\Phi(x)$

【答案】选项 C

例 3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$为相互独立随机变量，且均服从$[a,b]$上均匀分布，则（ ）

(A) n充分大时，$\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n(a+b)}{(b-a)\sqrt{n}}$近似服从$N(0,1)$

(B) n充分大时，$\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$近似服从$N(n(a+b),n(b-a)^2)$

(C) n充分大时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$近似服从$N(a+b,(b-a)^2)$

(D) n充分大时，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$近似服从$N\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{(b-a)^2}{12n}\right)$

【答案】选项 D

例 4 一生产线生产的产品成箱包装，假设每箱平均重量为 50 千克，标准差为 5 千克，若

用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977.（$\Phi(2)=0.977$，其中$\Phi(x)$是标准正态分布函数）.

【答案】98 箱

第六章 数理统计的基本概念

题型一 统计量数字特征

方法点拨:

设总体 X 的期望$EX=\mu$方差$DX=\sigma^2$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体 X，容量为 n 的一个样本，$\bar{X},S^2$ 分别为样本的均值和方差，则

$$EX_i=\mu,DX_i=\sigma^2\left(i=1,\cdots n\right),E\bar{X}=EX=\mu,\ D\bar{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{\sigma^2}{n},ES^2=DX=\sigma^2.$$

例 1. 设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$，$X_1,\ldots,X_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为S^2，则 $E\left(S^2\right)=$____

答案：2

例 2. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,\ldots,X_n$为来自总体总体 X 的简单随机样本，记统计量$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2$，求 EY,DY

答案：$EY=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，$DY=\frac{n-1}{n^2}(2\sigma^4)$

例 3. 设总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，$X_1,\ldots,X_n$为来自总体总体 X 的简单随机样本，记统计量$Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i-\mu\right|$，求 EY,DY

答案：$EY=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，$DY=\frac{1}{n}(1-\frac{2}{\pi})\sigma^2$

例 4. 设 $X_1,\ldots,X_n$ 为来自总体 $N\left(0,1\right)$ 的简单随机样本，$\bar{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\bar{X},i=1,2,\cdots,n.$求

（1）Y_i的方差 DY_i

（2） Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov\left(Y_1,Y_n\right)$

（3）若 $E\left[c\left(Y_1+Y_n\right)^2\right]=\sigma^2$，求 c

答案： $DY_i=1-\frac{1}{n}$， $\operatorname{cov}(Y_1,Y_n)=\frac{1}{n}$， $\frac{n}{2n-4}$

例 5. 设 $X_1,\dots,X_n$ 是来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(1)证明：T 是 μ^2 的无偏估计

(2) $\mu=0,\sigma=1$ 时求 DT

答案：（1）略，（2） $DT=\frac{2}{n(n-1)}$

题型二 统计量的抽样分布

方法点拨:

$\chi^2\left(n\right)$ 分布、$t\left(n\right)$ 分布和 $F\left(m,n\right)$ 分布是最常用的抽样分布，考生不必记忆其概率密度函数，只需了解他们的分布曲线示意图和分位数，会查相应分位数的数值表。

例 1. 设随机变量 X,Y 都服从 $N\left(0,1\right)$ 则（ ）

(A) $X+Y$ 服从正态分布

(B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布

(C) X^2,Y^2 都服从 χ^2 分布

(D) $\frac{X^2}{Y^2}$ 服从 F 分布

答案：C

例 2. X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N\left(1,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，统计量

$X=\frac{X_1-X_2}{\left|X_3+X_4-2\right|}$ 服从的分布为（　　）

$(A)\ X\sim N\left(0,1\right)$ 　　　　$(B)\ X\sim t\left(1\right)$

$(C)X \sim \chi^2(1)$　　　　$(D)X \sim F(1,1)$

答案：B

例 3. X_1,X_2,X_3是来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单随机样本，统计量$S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$服从的分布为（　　）

$(A)F(1,1)$　　　　$(B)F(2,1)$

$(C)t(1)$　　　　$(D)t(2)$

答案：C

例 4. 设X服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，$X_1,\cdots,X_n$是来自总体X的简单随机样本，则统计量$Y=\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^{n}X_i^2}$服从___分布，参数为____

答案：F，（1，n-1）

例 5. 已知(X,Y)联合概率密度为$f(x,y)=\dfrac{1}{12\pi}e^{-\frac{1}{72}(9x^2+4y^2-8y+4)}$，则统计量$Y=\dfrac{9X^2}{4(Y-1)^2}$服从___分布，参数为____.

答案：F，（1，1）

例 6. 设随机变量$X \sim t(n)(n>1), Y=\dfrac{1}{X^2}$则（　）

（A）$Y \sim \chi^2(n)$　　（B）$Y \sim \chi^2(n-1)$

（C）$Y \sim F(n,1)$　　（D）$Y \sim F(1,n)$

答案：C

例 7. 设随即变量$X \sim t(n)$，$Y \sim F(1,n)$给定$\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 C 满足$P\{X>c\}=\alpha$，则$P\{Y>c^2\}=$___

（A）α　　　　（B）$1-\alpha$

（C）2α　　　　（D）$1-2\alpha$

答案：C

例 8. $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的简单随机样本，$\bar{X}$是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2,$$
$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\quad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是（　　）

（A）$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$

（B）$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$

（C）$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$

（D）$t=\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$

答案：B

第七章 参数估计与假设检验

题型一 矩估计和最大似然估计

方法点拨:

点估计是近两年的概率论的命题热点，多表现为大题形式，考生应注意掌握。矩估计法和最大似然估计法是常考的构造估计量的方法，首先应理解二者的核心思想。

矩估计法：根据大数定律，样本矩、样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩、总体矩的连续函数。因此，就用样本矩作为总体矩的估计量。

最大似然估计法：对参数进行估计时，使“样本获此观测值”的概率最大的参数作为估计量，这样有利于 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的出现。

例 1. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(X;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, x\ge\alpha\\ 0, x<\alpha\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$，设 $X_1,X_2...,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）当$\alpha=1$时，求未知参数β的矩估计量；

（2）当$\alpha=1$时，求参数β的最大似然估计量；

（3）当$\beta=2$时，求参数α的最大似然估计量.

【答案】（1）$\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$ （2）$\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$ （3）$\min\{X_i\}$

例 2. 设总体 X 是离散型随机变量，X 可能取值 $0,1,2$，$P\{X=2\}=(1-\theta)^2$，$EX=2(1-\theta)$

（1）求 X 概率分布

（2）对 X 抽取容量 10 的样本，其中 5 个取 1，3 个取 2，2 个取 0. 求θ最大似然估计.

【答案】（1）$P\{X=1\}=2(\theta-\theta^2),P\{X=0\}=\theta^2$

（2）$\dfrac{9}{20}$

题型二 估计量的评选标准

例 1 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自二项分布总体$B(n,p)$的简单随机样本，$\overline{X}$和S^2分别为样本均值和样本方差。若$\overline{X}+kS^2$为np^2的无偏估计量，则$k=$______.

【答案】−1

例 2. 设总体 X 概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0\\ 0, & 其它\end{cases}$，$X_1,X_2\cdots X_n$是来自总计的简单随机样本，定义统计量$Z_1=\overline{X},Z_2=n\min\{X_1,X_2\cdots X_n\}$

（1）说明Z_1,Z_2是否是θ的无偏估计

（2）在（1）的条件下比较Z_1,Z_2的有效性

（3）说明Z_1是否是θ一致估计

【答案】（1）是无偏估计（2）Z_1比Z_2有效（3）略

题型三 参数的区间估计

方法点拨:

1. 区间估计就是用以统计量为端点的随机区间来刻画总体未知参数所在的范围.

2. 求正态总体未知参数的置信区间，其关键是通过未知参数的点估计求得含有θ及样本$X_1,\ldots,X_n$的枢轴变量$G=G(X_1,\ldots,X_n;\theta)$且分布已知，此时常常要用到正态总体样本均值与方差的分布、各种分布的典型模式及其性质（当n充分大时，应考虑中心极限定理），然后根据求置信区间的步骤即可求得置信区间．依此不难理解、记住教材上的各种置信区间.

例 1. 已知一批零件的长度X(单位:cm)服从正态分布$N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40（cm），则μ的置信度为 0.95 的置信区间是_______.

（注：$\Phi(1.96)=0.975,\Phi(1.645)=0.95$）

【答案】$39.51<\mu<40.49$

例 2. 设一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ,σ^2均未知，现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值$\bar{x}=20$（cm），样本标准差$s=1$（cm），则μ置信度为 0.90 的置信区间是（　　）

(A)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16))$

(B)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.10}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.10}(16))$

(C)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$

(D)　$(20-\frac{1}{4}t_{0.10}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.10}(15))$

【答案】选项 C

题型四 假设检验

方法点拨:

假设尽管有种种不同的形式，但对这些假设进行检验的基本思想都是相同的，即都是采用某种带有概率性质的反证法．依据是小概率原理：认为小概率事件在一次试验或观察中实际上不会发生，若在一次试验中发生了，就认为“不合理”．“小概率”的值通常根据实际问题的要求，规定一个可以接受的充分小的数 $\alpha(0<\alpha<1)$，当一个事件的概率不大于 α 时，即认为它是小概率事件，这里 α 为显著性水平．

例 1．对于正态总体 $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$（$\boldsymbol{\sigma}^2$ 未知）的假设检验问题 $\boldsymbol{H_0:\mu\le 1, H_1:\mu>1}$，若取显著性水平 $\boldsymbol{\alpha=0.05}$，则其拒绝域为（ ）

（A）$\left|\bar{X}-1\right|>u_{0.05}$

(B) $\bar{X}>1+t_{0.05}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(C) $\left|\bar{X}-1\right|>t_{0.05}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

(D) $\bar{X}<1-t_{0.05}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}}$

【答案】选项 B

例 2 设 $X_1,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，参数 μ,σ^2 未知，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\theta^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量为____

【答案】$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{\theta^2/n\left(n-1\right)}}$

例 3．设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机的抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程．

附表：t 分布表

$$P\{t(n) \le t_p(n)\} = p$$

$t_p(n)$ p / n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

【答案】略。