线性代数强化讲义

课程配套讲义是学习的必备资源，帮帮为大家精心整理了高质量的配套讲义，确保同学们学习的方便与高效。该讲义是帮帮结合大纲考点及考研辅导名师多年辅导经验的基础上科学整理的。内容涵盖考研的核心考点、复习重点、难点。结构明了、脉络清晰，并针对不同考点、重点、难点做了不同颜色及字体的标注，以便同学们复习时可以快速投入、高效提升。

除课程配套讲义外，帮帮还从学习最贴切的需求出发，为大家提供以下服务，打造最科学、最高效、最自由的学习平台：

服务项目	服务内容
名师高清视频课	零距离跟名师学习，精讲考点，突出重点，拿下难点，掌握方法
习题+月考+模考	精选配套习题，灵活自测，查缺补漏，时时提升
真题视频解析	精选整理了近十几年的真题+答案，视频详解近五年真题
复习规划指导	名师零距离直播/录播指导全程考研复习规划
24 小时内答疑	24 小时内详尽解答您复习中的疑点难点，确保学习无阻碍

把青春托付给值得信任的平台！

祝：复习愉快，天天高效，考研成功！

PS:讲义中的不足之处，欢迎各位研研批评指正，我们将竭尽所能追求更好！

目 录

第一章 行列式

题型一 数字行列式的计算

方法点拨：利用性质化简，转化为利用重要行列式和展开定理进行计算

【例】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

其中 $x_i \neq 0(i=2,\cdots,n)$.

【答案】$x_2 \ldots x_n\left(x_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i}\right)$

【例】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}.$$

【答案】$x_2 \ldots x_n\left(a+x_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{ax_1}{x_i}\right)$

【例】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+b & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+b & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+b \end{vmatrix}$$

【答案】$b^3\left(b+\sum_{i=1}^{4}a_i\right)$

【例】计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

【答案】$x^3\left(x+\sum_{i=1}^{4}a_i\right)$

【例】（2015，1）n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$____________.

【答案】$2^{n+1}-2$

【例】计算三对角线行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

【答案】$D_n=\begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \end{cases}$

【例】计算三对角线行列式

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

【答案】$D_n=\begin{cases} (n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta \end{cases}$

例如 $\begin{vmatrix}5&3&&&\\2&5&3&&\\&2&5&3&\\&&2&5&3\\&&&2&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6&&&\\1&5&6&&\\&1&5&6&\\&&1&5&6\\&&&1&5\end{vmatrix}=3^6-2^6=665$

题型二 抽象行列式的计算

方法点拨：化简抽象行列式，转化为行列式公式，进行计算.

知识回顾——行列式公式：

1) $|kA|=k^n|A|$

2) $|AB|=|A||B|$

3) $|A^T|=|A|$

4) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$

5) $|A^*|=|A|^{n-1}$

6) 若 A 的特征值为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ ，则 $|A|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$ 。

7) 若 A 与 B 相似，则 $|A|=|B|$ 。

【例】（2004，1，2，3）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，则 $|B|=$.

【答案】 $|B|=\dfrac{1}{9}$.

【例】（2005，1，2）设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)，\ B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$.

【答案】2

题型三 代数余子式求和

方法点拨：利用展开定理计算

知识点回顾——展开定理

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}|A|,i=j\\0,i\neq j\end{cases}$$

【例】设行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\0&2&\cdots&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

求（1）A 的所有代数余子式之和；

（2）$A_{11}+2A_{12}+\cdots+nA_{1n}$.

【答案】（1）$n!$（2）$n!$

第二章 矩阵

题型一 求高次幂

方法点拨：

（1）若 $r(A)=1$，即 $A=\alpha\beta^{T}$，则 $A^{n}=(\beta^{T}\alpha)^{n-1}A$

（2）A 为三阶矩阵，若 $A=E+B$，$B=\begin{pmatrix}0&a&c\\0&0&b\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $A^{n}=(E+B)^{n}=E+C_{n}^{1}B+C_{n}^{2}B^{2}$

（3）若 $A=\left(\begin{array}{c:c}B&0\\ \hdashline 0&C\end{array}\right)$，则 $A^{n}=\left(\begin{array}{c:c}B^{n}&0\\ \hdashline 0&C^{n}\end{array}\right)$

（4）A 可相似对角化，即 $P^{-1}AP=\Lambda$, 则 $A^{n}=P\Lambda^{n}P^{-1}$

【例】已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$，则 $A^{n}=$.

【答案】$14^{n-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$

【例】若 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $A^{n}=$.

【答案】$=\begin{pmatrix}1&2n&4n^{2}-n\\0&1&4n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

【例】若 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\-3&2&0\\4&1&2\end{pmatrix}$，则 $A^{n}=$.

【答案】$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ -3n2^{n-1} & 2^n & 0 \\ \left(8n-3C_n^2\right)2^{n-2} & n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$

【例】若 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix}$，则 $A^n=$.

【答案】$A^n=\begin{pmatrix} 3^n & n\bullet 3^{n-1} & C_n^2 3^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n\bullet 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6^{n-1}\bullet 3 & -6^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & -9\bullet 6^{n-1} & 3\bullet 6^{n-1} \end{pmatrix}$

【例】设 3 阶方阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i, i=1,2,3$，其中 $\alpha_1=(1,2,2)^T$，$\alpha_2=(2,-2,1)^T$，$\alpha_3=(-2,-1,2)^T$，求 A^n.

【答案】

$$A^n=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1+2^{n+2}+4\cdot 3^n & 2-2^{n+2}+2\cdot 3^n & 2+2^{n+1}-4\cdot 3^n \\ 2-2^{n+2}+2\cdot 3^n & 4+2^{n+2}+3^n & 4-2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ 2+2^{n+1}-4\cdot 3^n & 4-2^{n+1}-2\cdot 3^n & 4+2^n+4\cdot 3^n \end{pmatrix}$$

题型二 逆的判定与求法

方法点拨：

（1）逆的判定方法：

（I）定义法，

（II）可逆的充要条件

n 阶方阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 存在 n 阶方阵 B，有 $AB=BA=E$

$\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

$\Leftrightarrow$ $A=P_1P_2\cdots P_s$，其中 P_i 是初等矩阵

$\Leftrightarrow$ A 的列（行）向量组线性无关

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow$ $\forall b$, 非齐次方程组 $Ax=b$ 总有唯一解

$\Leftrightarrow$ A 的所有特征值全不为 0

（2）逆的求法

（I）A 为抽象矩阵：由定义或性质求

（II）A 为数字矩阵：$(A \vdots E) \xrightarrow{\text{行}} \cdots \rightarrow (E \vdots A^{-1})$

【例】设 n 阶矩阵 A，B，C 满足关系式 $ABC=E$，则**【】**

（A）$ACB=E$ （B）$CBA=E$ （C）$BAC=E$ （D）$BCA=E$

【答案】D

【例】设 A 为 n 阶矩阵，且 $A^2=2A$，下列结论中不正确的是**【】**

（A）A 可逆（B）$A-E$ 可逆（C）$A+E$ 可逆（D）$A-3E$ 可逆

【答案】A

【例】设 A，B 为 n 阶矩阵，且 $AB=A+B$，证明 $AB=BA$.

【例】设 A 为 n 阶方阵且满足条件 $A^2+A-6E=0$，求 A^{-1}，$(A+E)^{-1}$，$(A+4E)^{-1}$.

【答案】$A^{-1}=\frac{1}{6}(A+E)$，$(A+E)^{-1}=\frac{1}{6}A$，$(A+4E)^{-1}=-\frac{1}{6}(A-3E)$

【例】（2015，2，3）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，$A^3=O$，

（1）求 a 的值；

（2）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，求 X.

【答案】（I）a=0

(II) $X=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

题型三 秩的证明与计算

方法点拨：

（1）A 为抽象矩阵，由秩的定义或性质证明计算

（2）A 为数字矩阵，A 应用初等行变换，转化为阶梯型矩阵，则 r(A)=非零行的行数

【例】设 A 为 5 阶方阵，$A^2=O$，$r(A)>1$，则 $r(A)=$__________.

【答案】2

【例】设 A 为 n 阶方阵，证明

（1）若 $A^2=A$，则 $r(A)+r(A-E)=n$；

（2）若 $A^2=E$，则 $r(A+E)+r(A-E)=n$.

【例】设 A,B 均为 n 阶方阵，$A^2+AB=E$，则 $r(AB-BA-2A)=$__________.

【答案】n

【例】3 阶矩阵 A,B 满足 $A^2+2AB=E$，$B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&a\\0&0&4\end{pmatrix}$，则

$r(AB-2BA+3A)=$__________.

【答案】2

题型四 关于伴随矩阵

方法点拨：

（一）掌握伴随的定义

设 A 是 n 阶矩阵，则 $A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$

（二）掌握伴随的性质

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$AA^*=A^*A=|A|E$$

（2）$\left|A^*\right|=|A|^{n-1};(n\geq 2)$

（3）$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$

（4）$\left(A^*\right)^T=\left(A^T\right)^*$；

（5）$r(A^*)=\begin{cases} n, 若 r(A)=n \\ 1, 若 r(A)=n-1 \\ 0, 若 r(A)<n-1 \end{cases}$

（6）若 A 可逆，则 $(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A, (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*, A^*=|A|A^{-1}$

（7）$(kA)^*=k^{n-1}A^*$

（8）$(AB)^*=B^*A^*$

【例】（2003）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$，若 $r(A^*)=1$，则**【】**

（A）$a=b$ 或 $a+2b=0$.　　（B）$a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

（C）$a\neq b$ 且 $a+2b=0$.　　（D）$a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$

【答案**】**C

【例】设 A 为 $n(n\geq 3)$ 阶非零矩阵，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，则

（1）$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=1$；

（2）$a_{ij}=-A_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow A^*=-A^T\Leftrightarrow AA^T=E$ 且 $|A|=-1$.

【例】（2005）设 3 阶矩阵 A 满足 $A^*=A^T$，若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则

$a_{11}=$__________.

【答案**】**$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【例】（2013，1，2，3）设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则

$|A|$__________.

【答案**】**-1

题型五 初等变换与初等矩阵

方法点拨：紧抓初等变换的定义和性质

知识回顾：初等矩阵的性质

（i）**性质 1** 初等矩阵都是可逆矩阵，且其逆阵也是同类初等矩阵，

$$\boldsymbol{E}^{-1}(i,j)=\boldsymbol{E}(i,j)；\ \boldsymbol{E}^{-1}(i(k))=\boldsymbol{E}(i(\frac{1}{k}))；\ \boldsymbol{E}^{-1}(r_i+kr_j)=\boldsymbol{E}(r_i-kr_j)$$

（ii）**性质 2** 用初等矩阵 P 左（右）乘 A，所得 PA（AP）就是矩阵 A 作了一次与 P 同样的行（列）的初等变换。

【例】（2009）设 A，P 均为 3 阶矩阵，$P^TAP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^TAQ=$__________.

【答案】

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

【参考过程】

$$\begin{aligned}Q^TAQ&=\left[PE_{12}(1)\right]^T A\left[PE_{12}(1)\right]=E_{12}^T(1)(P^TAP)E_{12}(1)\\&=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

【例】（2005，1，2）设 A 为 $n(n\geq 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B，则【】

（A）交换 A^* 的第一列与第二列，得 B^*

（B）交换 A^* 的第一行与第二行，得 B^*

（C）交换 A^* 的第一列与第二列，得 $-B^*$

（D）交换 A^* 的第一行与第二行，得 $-B^*$

【答案】C

第三章 向量

题型一 线性表示的判定与求法

方法点拨：

（1）线性表示的判定：应用定义及线性表示的充要条件

非零列向量β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

$$\Leftrightarrow \text{非齐次方程}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}=\beta\text{有解} \Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta)$$

（2）线性表示的求法：

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，$\beta$可由其线性表示

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s \mid \beta)\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\text{行最简形} \mid \text{系数})$$

【例】（2013，1，2，3）设A，B，C均为n阶矩阵，若$AB=C$，且B可逆，则**【】**

（A）矩阵C的行向量组与A的行向量组等价

（B）矩阵C的列向量组与A的列向量组等价

（C）矩阵C的行向量组与B的行向量组等价

（D）矩阵C的列向量组与B的列向量组等价

【答案】B

【例】（2004）设

$$\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$$

试讨论当a,b为何值时，

（1）β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

（2）β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$唯一地线性表示，并求出表示式；

（3）β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

【答案】

（1）a=0，b为任意常数

（2）a$\neq$0 且 a$\neq$b，$\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$

（3） a$\neq$0 且 a=b $\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\left(\frac{1}{a}+\mu\right)\alpha_2+\mu\alpha_3$(其中μ 为任意常数)

题型二 线性相关、无关的判定

方法点拨：

（1）利用线性相关、无关定义法

（2）利用向量组的秩与向量组中元素个数的关系

【例】（1998）设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量，若 $A^{m-1}\alpha\neq 0$，$A^m\alpha=0$，证明向量组 $\alpha,A\alpha,A^2\alpha,\cdots,A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

【答案】略

【例】 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t(t>2)$ 线性无关，令

$$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_t,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_t,\cdots,\beta_t=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{t-1}$$

证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关.

【答案】略

【例】 设非齐次线性方程组 $Ax=b$ 对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$，$\eta$ 为 $Ax=b$ 的一个特解.

证明（1）$\eta,\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

（2）$\eta,\eta+\xi_1,\eta+\xi_2,\cdots,\eta+\xi_{n-r}$ 线性无关.

【答案】略

【例】 设 4 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，与 4 维列向量 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 均正交，证明 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性相关.

【答案】略

题型三 求极大线性无关组与向量组的秩

方法点拨：

（1）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为抽象的向量组，由极大线性无关组定义确定极大无关组

（2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为数字型向量组，对向量组进行初等行变换得到阶梯形，则每行第一个非零数对应的列向量构成极大无关组.

【例】求向量组的极大线性无关组，并线性表示其余向量.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}4\\-2\\5\\7\end{pmatrix},\alpha_5=\begin{pmatrix}-3\\-1\\-5\\-8\end{pmatrix}$$

【答案】α_1、α_2、α_4为极大线性无关组，$\alpha_3=2\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_5=-\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

【参考过程】

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=\begin{pmatrix}1&1&1&4&-3\\1&-1&3&-2&-1\\2&1&3&5&-5\\3&1&5&7&-8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&2&0&-1\\0&1&-1&0&2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

【例】设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，向量组（Ⅱ）：

$$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_m,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_m,\cdots,\beta_m=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{m-1}$$

证明$r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$.

【答案】略

【例】（1）设A，B均为$m\times n$矩阵，证明$r(A+B)\le r(A)+r(B)$；

（2）设A是$m\times n$矩阵，B是$n\times s$矩阵，证明$r(AB)\le\min\{r(A),r(B)\}$.

第四章 线性方程组

题型一 解的判定

方法点拨：

（一）齐次方程组有非零解的判定

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解的充分必要条件是 $r(A)<n$.

（二）非齐次方程组有解的判定

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，方程组 $Ax=b$，则

（1）有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=\overline{r}(A)=n$

（2）有无穷多解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=\overline{r}(A)<n$

（3）无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)+1=\overline{r}($

$\Leftrightarrow$ b 不能由 A 的列向量线性表出

【例】设齐次方程 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 A.若存在 3 阶非零矩阵 B，使得 $AB=O$，则【】

（A）$\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$ （B）$\lambda=-2$ 且 $|B|=0$

（C）$\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$ （D）$\lambda=1$ 且 $|B|=0$

【答案】D

【参考过程】

$$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

【例】非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 4×5 阶矩阵，且 A 的行向量组线性无关，则下列命题中错误的是【】

（A）齐次线性方程组 $A^Tx=0$ 只有零解

（B）齐次线性方程组 $A^T Ax=0$ 有非零解

（C）任意列向量 b， $Ax=b$ 无穷多解

（D）任意列向量 b，方程组 $A^T x=b$ 有唯一解

【答案】D

题型二 求齐次线性方程组的通解

方法点拨：重点在于基础解系的求法

【例】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\-1&1&3\end{pmatrix}$，求方程组 $A^* x=0$ 的通解.

【答案】$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 k_1、k_2 为任意常数

【例】设 $A=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}$，$B$ 为 4 阶矩阵，$r(B)=2$，且 $AB=O$，求方程组 $Ax=0$ 的通解.

【答案】$k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$,其中 k_1、k_2 为任意常数

【参考过程】

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&2\\0&1&t&t\\1&t&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&t-2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&2\\0&1&t&t\\0&0&-(1-t)^2&-(1-t)^2\end{pmatrix}$$

【例】（2002）已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0 \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0 \\ bx_1+bx_2+ax_3+\cdots+bx_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0 \end{cases}$$

其中$a\neq 0$，$b\neq 0$，$n\geq 2$. 讨论a和b为何值时，方程组只有零解，有无穷多解？当方程组有无穷多解时，求出全部解.

【答案】

（1）当$a\neq b$且$a\neq(1-n)b,|A|\neq 0,\ \gamma(A)=n$方程只有零解.

（2）当$a=b\neq 0,|A|=0,\ \gamma(A)<n,$方程有无穷解，方程组的基础解系为

$\alpha_1=(-1,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$, $\alpha_2=(-1,\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)^T$

$\cdots,\alpha_{n-1}=(-1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 1)^T$，则方程组的全部解为$k_1\alpha_1+\ldots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$, 其中$k_1,\cdots k_{n-1}$为任意常数.

（3）当$a=(1-n)b\neq 0,|A|=0,\ \gamma(A)<n$方程有无穷解，方程组的基础解系为$\beta=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$，则方程组的全部解为$k\beta$，其中 k 为任意常数.

【参考过程】

$$A=\begin{pmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1-n) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & (1-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & (1-n) & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (1-n) \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} (1-n) & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

题型三 求非齐次线性方程组的通解

方法点拨：

如 n 元线性方程组 $Ax=b$ 有解，设 ξ_1、ξ_2、…、ξ_r 是相应齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，ξ_0 是 $Ax=b$ 的某个已知解，则 ξ_0 称为非齐次方程组 $Ax=b$ 的特解，$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\ldots+k_r\boldsymbol{\xi}_r+\boldsymbol{\xi}_0$ 是 $Ax=b$ 的通解。

【例】设 4 元线性方程组 $Ax=b$，$r(A)=3$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其三个解.若 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(2,3,4,5)^T$，则方程组的通解为.

【答案】$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix},k$为常数

【例】（2002，1，2，3）已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量，其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，$\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$.若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

【答案】$x=(1,\quad 1,\quad 1,\quad 1)^T+k(1,\quad -2,\quad 1,\quad 0)^T$ 其中 k 为任意常数

【例】（2006）已知 η_1,η_2,η_3 为非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$$

3 个线性无关的解.

（1）证明系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；

（2）求 a,b 的值及方程组的通解.

【答案】a=2,b=-3

$$x=\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}$$，其中 $k_1,\cdots k_{n-1}$ 为任意常数.

【参考过程】

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&1-a&3-a&b-a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2a&b+4a-5\end{pmatrix}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\2&1&3&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

【例】当 $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ 时，求所有的二阶矩阵 B，使得 $AB=A$.

【答案】$B=\begin{pmatrix}1-2\mu&2-2\nu\\\mu&\nu\end{pmatrix}$，其中 μ、ν 为任意常数

题型四 公共解与同解

方法点拨：

（一）非零公共解充要条件

方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 有非零公共解 $\Leftrightarrow\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}x=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}<n$

（二）同解充要条件

方程组 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解 $\Leftrightarrow r(A)=r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(B)$

【例】设 A 为 n 阶矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 有两个线性无关的解，则**【】**

（A）$A^*x=0$ 的解均为 $Ax=0$ 的解

（B）$Ax=0$ 的解均为 $A^*x=0$ 的解

（C）$Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 无非零公共解

（D）$Ax=0$ 与 $A^*x=0$ 恰有一个非零公共解

【答案】B

【例】(2003)设齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A， B 均为 $m\times n$ 矩阵，以下 4 个命题正确的是【】

(1)若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\ge r(B)$.

(2)若 $r(A)\ge r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解.

(3)若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$.

(4)若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

(A)(1)(2)(B)(1)(3)(C)(2)(4)(D)(3)(4)

【答案】B

【例】(2007，1，2，3)设齐次线性方程组

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$(\mathrm{II})\ x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解，求 a 的值及所有公共解.

【参考过程】

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 3 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & (a-1)(a-2) \end{array}\right)$$

【答案】a=1 或 2，

当 a=1，公共解为 $k(1,\quad 0,\quad -1)^T$，其中 k 为任意常数

当 a=2，有唯一公共解为 $\alpha_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

第五章 特征值与特征向量

题型一 特征值与特征向量的计算

方法点拨：

（1）对于抽象的矩阵，要根据特征值与特征向量的定义与其性质推导出特征值的取值。

（2）对于具体的数字矩阵，应先根据特征方程$|\lambda E-A|=0$求出矩阵 A 的全部特征值$\lambda_i(i=1,2,\ldots,n)$，其中可能有重根。然后对每个不同的特征值$\lambda_i$，分别解齐次方程组$(\lambda_i E-A)x=0$。设$r(\lambda_i E-A)=r_i$，如果求出方程组的基础解系（即矩阵 A 关于特征值λ_i的线性无关的特征向量）$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r_i}$，则矩阵 A 属于$\lambda_i$的全部特征向量为$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r_i}\xi_{n-r_i}$，其中$k_1,k_2,\cdots k_{n-r_i}$是不全为零的任意常数。

【例】设$A=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-1&5&-1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，求$A$的特征值.

【答案】$\lambda_1=2,\ \lambda_2=3,\ \lambda_3=6$

【例】设$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&5&2\\3&6&4\end{pmatrix}$，求$A^*$的特征值与特征向量.

【答案】

A^*的特征值为 1,9,9；

$\lambda_1=1$时，特征向量为$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$，所有特征向量为$k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$

$\lambda_2=\lambda_3=9$时 特征向量为$\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，所有特征向量为

$k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$（k_2,k_3不全为0）

【例】设 A 是 n 阶矩阵，$|A|=2$，若矩阵 $A+E$ 不可逆，则 A^* 必有特征值（）.

【答案】-2

【例】α,β 为三维单位正交列向量，$A=\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$，求 A 的特征值.

【答案】1、-1、0

【例】设 A，B 是 n 阶矩阵，证明

（1）AB与BA有相同的行列式；

（2）AB与BA有相同的特征值；

（3）$tr(AB)=tr(BA)$.

题型二 相似对角化的判定

方法点拨：

重点把握相似对角化的定义、充要条件及与对角矩阵 Λ 相似的充分条件

【例】(2004，1，2）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

【参考过程】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}$$

$$2E-A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$4E-A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

【答案】$a=-2$，A 可以相似对角化。$a=-\frac{2}{3}$，A 不可相似对角化

【例】(2004，3) 设 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

【答案】

(1) 特征值 $\lambda_1=1+(n-1)b$，对应特征向量为 $k_1\xi_1$，其中 $\xi_1=(1,1,\cdots,1)^T$ 其中 k_1 为任意常数.

特征值 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$，对应特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n$，其中 $k_2,k_3,\cdots k_n$ 为不全为零的任意常数，$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^T$，$\xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^T$，$\cdots$ $\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^T$

(2) $b\neq 0$ 时，$P=[\xi_1\quad \xi_2\quad \cdots\quad \xi_n]$；b=0 时，P 为任意 n 阶可逆矩阵 P。

【例】(2014，1，2，3) 证明 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. 与 $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$ 相似.

【答案】略

【例】设 n 阶方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=0$，证明 A 可相似对角化.

【答案】略

题型三 实对称矩阵

方法点拨：

利用实对称矩阵对应于不同的特征值的特征向量相互正交来求特征向量.同时还要注意特征值和特征向量的应用，如求矩阵的 n 次幂，已知特征值和特征向量反过来求原矩阵。

【例】（2001）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$，已知非齐次方程 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，求

（1）a；

（2）正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵.

【参考过程】

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&-a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{array}\right)$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+2&-1\\2&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\cdots=(\lambda-3)(\lambda+3)\lambda=0$$

当 $\lambda_1=3$ 时，

$$3E-A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\-1&5&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_2=-3$ 时，

$$-3E-A=\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&-1&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda_3=0$ 时，

$$-A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\-1&2&-1\\2&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

【答案】$a=-2$，

$$Q=[e_1\quad e_2\quad e_3]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\text{且使}Q^TAQ=\begin{bmatrix}0&&\\&3&\\&&-3\end{bmatrix}$$

【例】（2006，1，2，3）设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3，向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

（1）求 A 的特征值与特征向量;

（2）求正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

【参考过程】

$$\beta_1=\alpha_1,\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

【答案】

（1）A 的特征值为 0,0,3.特征值 0 对应的特征向量为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$（k_1,k_2 不全为 0）；特征值 3 对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,1,1)^T$

（2）$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\Lambda=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{bmatrix}$$

【例】已知 A 是 3 阶实对称矩阵，$r(A)=2$，$\alpha_1=(1,a,1)^T$ 是特征值 3 的特征向量，$\alpha_2=(a,a+1,1)^T$ 是特征值−6 的特征向量，求矩阵 A.

【答案】$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

【参考过程】

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -6 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

第六章 二次型

题型一 二次型化标准形

方法点拨：

化二次型为标准形的方法有：

（1）用配方法化二次型为标准形（2）用正交变化法化二次型为标准形

【例】（2002）已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$$

经正交变换可化为标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$.

【答案】2

【例】已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$，

（1）用正交变换把二次型化成标准形，并写出相应的正交矩阵 Q；

（2）当 $x^Tx=2$ 时，求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.

【答案】（1）$5y_2^2+6y_3^2$ ，（2） $f(x_1,x_2,x_3)$ 的最大值.为 12

【参考过程】

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda-5 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda-5 & 0\\ 0 & 2(\lambda-5) & \lambda-5\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -5 & 2\\ -1 & \lambda-5 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-5)(\lambda-6)=0$$

当 $\lambda=0$ 时，

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ -1 & -5 & 0\\ 2 & 0 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=5$ 时，

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $\lambda = 6$ 时，

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^T x = (Qy)^T (Qy) = y^T Q^T Q y = y^T y = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 2$$

$$x^T A x = 5y_2^2 + 6y_3^2 \le 6(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 12$$

【例】 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2ax_2x_3$ 通过正交变换 $x = Qy$ 化为标准形 $f = 3y_1^2 + 3y_2^2 + by_3^2$，求参数 a, b 及所用的正交变换.

【答案】$a = -2, b = -3$；正交矩阵 $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

【参考过程】

$$1+1+1 = 3+3+b，\ |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & a \\ -2 & a & 1 \end{vmatrix} = 3\times3\times b，\ a = -2, b = -3$$

当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 时，

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

特征值为 α_1，α_2

当$\lambda_3=-3$时，

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

特征值为α_3

【例】(2010)已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$在正交变换$x=Qy$下的标准形为$y_1{}^2+y_2{}^2$，

且Q的第 3 列为$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})^T$.

（1）求矩阵A；

（2）证明$A+E$为正定矩阵.

【答案**】**

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

题型二 合同的判定

方法点拨：

（1）合同的定义

设A和B是n阶实对称矩阵，若有可逆矩阵C，使$B=C^TAC$，则称矩阵A与B合同．记作$A\simeq B$。

（2）n阶实对称矩阵A和B合同的充要条件为二次型$\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$与$\mathbf{x}^TB\mathbf{x}$有相同的正、负惯性指数

【例】设A是 n 阶实对称矩阵，下列与A合同的是（）

（A）$A-E$（B）$A+E$（C）A^3-A（D）A^3+A

【答案**】**D

【例】设A是 3 阶实对称矩阵，将矩阵A的 1，2 两行互换后再 1，2 两列互换，得到矩阵B.试判断A与B是否等价、相似、合同?

【答案**】**A与B等价、相似、合同

题型三 正定的判定

方法点拨：

（1）A 为数字矩阵，（i）先验证正定必要条件；（ii）若（i）满足则验证顺序主子式均大于 0

（2）A 为抽象矩阵，（i）先证明 A 为实对称矩阵；（ii）由定义法或特征值法进行计算

【例】下列矩阵中，正定矩阵是**【】**

（A）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$（B）$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$（C）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$（D）$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

【答案】D

【例】（1999）设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵， E 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^T A$，试证当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

【答案】略